This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

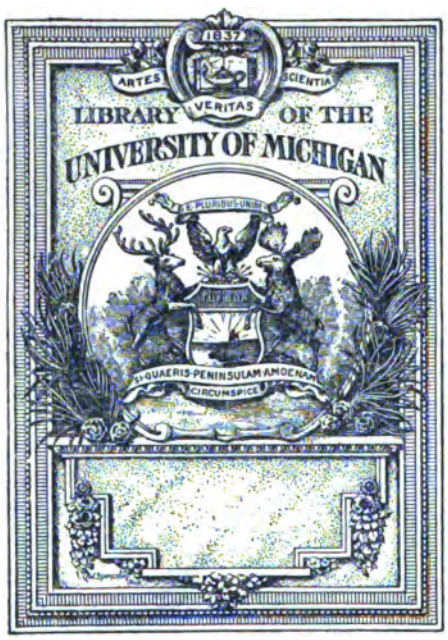
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

B 49924 1

Digitized by Google



Digitized by Google

MATHEMATICS
QA
261
.D485

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

N° D'ORDRE
19.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS,

PAR M. PIERRE VANDEUREN,
Lieutenant du Génie de l'armée belge.

1re THÈSE. — THÉORIE DES CHAMPS CONTINUS BILINÉAIRES.
2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le Juin 1904 devant la Commission d'Examen.

MM. APPELL, *Président.*
BOUSSINESQ, KŒNIGS, *Examinateurs.*

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.
1904

Digitized by Google

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	P. APPELL	Mécanique rationnelle.
DOYEN HONORAIRE	G. DARBOUX, Prof	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES	L. TROOST. Ch. WOLF.	
PROFESSEURS	LIPPMANN	Physique.
	BOUTY	Physique.
	BOUSSINESQ	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	YVES DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	G. BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	GIARD	Zoologie, Évolution des êtres organisés.
	KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	VÉLAIN	Géographie physique.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CHATIN	Histologie.
	PELLAT	Physique.
	HALLER	Chimie organique.
	H. MOISSAN	Chimie.
	JOANNIS	Chimie (Ens^{nt} P.C.N.).
	P. JANET	Physique (Ens^{nt} P.C.N.).
	WALLERANT	Minéralogie.
	ANDOYER	Astronomie physique.
	PAINLEVÉ	Mathématiques générales.
	HAUG	Géologie.
	N	Chimie biologique.
	N	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEURS ADJOINTS	PUISEUX	Mécanique et Astronomie.
	RIBAN	Chimie analytique.
	RAFFY	Analyse et Mécanique.
	LEDUC	Physique.
	HADAMARD	Calcul différentiel et Calcul intégral.
SECRÉTAIRE	A. GUILLET.	

Digitized by Google

A MONSIEUR LE LIEUTENANT-GÉNÉRAL

A. COUSEBANT D'ALKEMADE,

MINISTRE DE LA GUERRE DE BELGIQUE.

Hommage respectueux.

132467

Digitized by Google

Digitized by Google

THÉORIE DES CHAMPS CONTINUS BILINÉAIRES.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION 1

PREMIÈRE PARTIE. — **Théorie.**

CHAPITRE I. — *Généralités sur les champs de vecteurs et les champs bilinéaires...* 5

I. Représentation des dérivées partielles du premier ordre d'une fonction de trois variables indépendantes. — Généralisation : champs continus de vecteurs.
II. Représentation des dérivées partielles du premier ordre d'un champ continu de vecteurs.
III. Généralisation : champs continus bilinéaires, quadratiques et tourbillonnaires.

CHAPITRE II. — *Étude des champs continus bilinéaires symétriques ou quadratiques* 18

I. Vecteurs-pression.
II. Vecteur-force.
III. Champ quadratique résultant.
IV. Produits de champs quadratiques et de champs de vecteurs.

CHAPITRE III. — *Étude des champs continus bilinéaires symétriques gauches ou tourbillonnaires* 32

I. Vecteur-tourbillon.
II. Vecteurs-pression.
III. Vecteur-force.
IV. Champ tourbillonnaire résultant.
V. Produits de champs tourbillonnaires.

CHAPITRE IV. — *Perfections des champs bilinéaires* 36

I. Perfection des champs de vecteurs.
II. Perfection des champs bilinéaires.
III. Quelques données au sujet de champs bilinéaires perfectionnés.

Digitized by Google

SECONDE PARTIE. -- **Applications**.

PREMIÈRE APPLICATION. — *Étude cinématique de la vitesse et de l'accélération dans le mouvement d'un milieu continu*..... 47

I. Vitesse.
II. Accélération.
III. Accélération par déformation.
IV. Accélération par rotation.
V. Champ quadratique dérivant du vecteur d'accélération.
VI. Transport à la vitesse des propriétés de l'accélération.

DEUXIÈME APPLICATION. — *Premier exemple de pressions résultant de sommes de vecteurs assimilables à des forces moléculaires*..... 60

TROISIÈME APPLICATION. — *Deuxième exemple de pressions résultant de sommes de vecteurs assimilables à des forces moléculaires. — Théorie de la propagation de la chaleur par conductibilité dans les milieux indéfinis par Fourier*.. 68

I. Vecteur différentiel.
II. Pression de Navier.
II. Transformation en intégrales de volume des sommes donnant les pressions de Navier.
IV. Application : Théorie de la propagation de la chaleur par conductibilité de Fourier.

QUATRIÈME APPLICATION. — *Champs quadratiques d'attraction. — Moments d'inertie.* 83

I. Potentiel d'attraction.
II. Champs quadratiques $\overline{\overline{N}}$ et $\overline{\overline{N_0}}$.
III. Application des champs $\overline{\overline{N}}$: Moments d'inertie.

Digitized by Google

PREMIÈRE THÈSE.

THÉORIE DES CHAMPS CONTINUS BILINÉAIRES.

INTRODUCTION.

Il est fait un constant usage, en Mécanique et en Physique mathématique, du mode de représentation de certains éléments physiques à l'aide d'un **vecteur.**

Les cas d'emploi du vecteur sont tellement nombreux et tellement divers, qu'on est arrivé à édifier une **théorie vectorielle** renfermant, sous forme de données analytiques, les divers théorèmes d'analyse qui intéressent la représentation géométrique à l'aide de vecteurs.

Actuellement, les théories des *systèmes de vecteurs* ou *systèmes de segments* (1) et les propriétés des *champs continus de vecteurs* (2) sont devenues classiques, et sont enseignées indépendamment des applications qui ont donné naissance à ces théories.

Nous nous proposons d'étendre cette méthode didactique qui facilite singulièrement l'étude des sciences appliquées, en réunissant sous forme de théorie analytique un grand nombre de théorèmes concernant les *champs continus bilinéaires* que nous avons classés en *champs bilinéaires symé-*

(1) M. Koenigs, *Leçons de Cinématique,* Théorie des segments. Paris, Hermann; 1897.

(2) M. Appell, *Cours de Mécanique rationnelle,* T. III, Chap. XXVIII. Paris, Gauthier-Villars; 1903.

Digitized by Google

triques ou quadratiques et en *champs bilinéaires symétriques gauches ou tourbillonnaires.*

Voici ce que nous entendons par champs bilinéaires :

Considérons le vecteur $\overline{V}$ et ses projections V_x, V_y et V_z sur les trois axes rectangulaires ox, oy et oz.

V_α étant la projection de $\overline{V}$ sur la direction (α) faisant avec ox, oy, et oz des angles dont les cosinus directeurs sont α_1, α_2, α_3, on a

$$V_\alpha = V_x\alpha_1 + V_y\alpha_2 + V_z\alpha_3.$$

La connaissance de $\overline{V}$ revient à celle de V_α pour toutes les directions (α); V_α est une fonction linéaire et homogène par rapport à α_1, α_2, α_3.

Par extension, on pourrait étudier la fonction générale homogène et du deuxième degré par rapport aux cosinus des deux directions (α) et (β) :

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta} = {} & V_{xx}\alpha_1\beta_1 + V_{yy}\alpha_2\beta_2 + V_{zz}\alpha_3\beta_3 + V_{yz}\alpha_2\beta_3 \\ & + V_{zy}\alpha_3\beta_2 + V_{zx}\alpha_3\beta_1 + V_{xz}\alpha_1\beta_3 + V_{xy}\alpha_1\beta_2 + V_{yx}\alpha_2\beta_1. \end{aligned}$$

Nous avons appelé $V_{\alpha\beta}$: *fonction générale d'un champ bilinéaire;* celui-ci devient un champ symétrique ou quadratique lorsque

$$V_{yz} = V_{zy}, \qquad V_{zx} = V_{xz}, \qquad V_{xy} = V_{yx},$$

et un champ bilinéaire symétrique gauche ou tourbillonnaire lorsque

$$V_{xx} = V_{yy} = V_{zz} = 0, \qquad V_{yz} = -V_{zy}, \qquad V_{zx} = -V_{xz}, \qquad V_{xy} = -V_{yx}.$$

Avec ce point de départ, l'étude des champs continus bilinéaires peut se poursuivre d'une façon absolument abstraite. Elle se présente sous la forme d'une généralisation de la théorie des champs de vecteurs; par exemple, la représentation des fonctions $V_{\alpha\beta}$ se fait à l'aide d'une quadrique (n° **22**) ou surface du second degré, au lieu de se faire à l'aide d'un segment rectiligne; la notion de la *résultante géométrique* (n° **28**) et du *produit* (n° **29**) de deux segments est aussi très naturellement étendue au cas des champs bilinéaires. Par contre, certaines données nouvelles, telles que les *vecteurs-pressions* (n° **19**) et le *vecteur-force* (n° **26**) qui n'existent pas dans la

Digitized by Google

théorie du champ de vecteurs, résultent de la forme plus compliquée de la fonction $V_{\alpha\beta}$.

Les *applications des champs bilinéaires* ne sont pas moins importantes que celles des champs de vecteurs.

En principe, chaque fois que l'on rencontre en mécanique ou en physique mathématique une représentation d'éléments à l'aide de quadriques, on a une application des champs bilinéaires.

La théorie dont nous avons établi les bases facilitera tout naturellement l'étude de ces applications. Il suffira de reconnaître qu'un élément se présente sous la forme d'un champ quadratique ou d'un champ tourbillonnaire, pour que toutes les propriétés que nous avons rassemblées dans la théorie leur soient applicables.

On évitera ainsi d'inutiles répétitions de démonstrations; celles-ci pourront d'ailleurs gagner en généralité, car, dans chaque cas particulier, elles sont faites souvent à l'aide des données particulières de la question. L'exposition pourra aussi gagner en concision et en clarté.

Nous avons cité, dans la deuxième Partie de notre travail, quelques exemples très connus et des plus divers, où les résultats de la théorie des champs continus bilinéaires sont mis largement à contribution.

Par exemple, l'étude de la variation de l'accélération dans un milieu continu en mouvement dépend de champs quadratiques et de champs tourbillonnaires. En renouvelant quelque peu l'exposition de la question, nous avons pu établir incidemment quelques théorèmes, peut-être originaux, concernant la cinématique des milieux continus.

De même, dans un milieu soumis à des actions moléculaires, la distribution des pressions se fait sous la forme d'un champ quadratique. Nous donnons, en toute rigueur, des démonstrations nouvelles de résultats connus dus pour la plupart à Cauchy.

La conception des champs bilinéaires nous a aussi permis de former en quelques instants l'équation du mouvement de la chaleur dans les corps hétérotropes indéfinis, dans l'hypothèse du rayonnement particulaire de Fourier.

Enfin, nous avons encore introduit la théorie des champs bilinéaires dans

Digitized by Google

l'étude de l'attraction centrale exercée par un milieu continu limité. Nous y avons rencontré, comme cas particulier au point de vue analytique, le calcul et la représentation des moments d'inertie d'un milieu matériel.

On voit que les applications des champs continus bilinéaires sont suffisamment nombreuses et variées pour justifier l'utilité de la théorie que nous avons tenté d'édifier.

Nous avons innové dans celle-ci quelques notations que nous nous sommes efforcé de rendre aussi concises et aussi intuitives que possible. Peut-être ces notations rendront-elles quelques services.

En terminant cette Introduction, qu'il nous soit permis d'adresser nos plus vifs remerciements à MM. Appell, Boussinesq et Kœnigs, professeurs à la Faculté des Sciences de Paris, et Cuvelier, capitaine-commandant du Génie, professeur à l'École militaire de Belgique, qui ont bien voulu nous guider dans nos recherches.

Digitized by Google

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES CHAMPS DE VECTEURS ET LES CHAMPS BILINÉAIRES.

I. — Représentation des dérivées partielles du premier ordre d'une fonction de trois variables indépendantes. — Généralisation : champs continus de vecteurs.

1. Considérons une fonction continue

$$\Phi(x, y, z)$$

de 3 variables indépendantes xyz, celles-ci étant les coordonnées d'un point quelconque M de l'espace par rapport aux axes rectangulaires fixes $oxyz$.

Soit $ox'y'z'$ un autre système d'axes orthogonanx fixes, ox' faisant avec ox, oy et oz des angles dont les cosinus sont (α) : $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$; oy' des angles dont les cosinus sont (β) : $\beta_1\beta_2\beta_3$; oz' des angles dont les cosinus sont (γ) : $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

On a les relations

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z', \\ y = \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z', \\ z = \alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z'. \end{cases}$$

D'où l'on tire en dérivant partiellement par rapport à x' (notations de Jacobi)

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \alpha_1, \qquad \frac{\partial y}{\partial x'} = \alpha_2, \qquad \frac{\partial z}{\partial x'} = \alpha_3.$$

D'ailleurs

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x'}$$

et par suite

$$(2)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x'} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\alpha_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\alpha_3.$$

Digitized by Google

2. On peut représenter $\frac{\partial \Phi}{\partial x'}$ de la manière suivante :

Considérons le vecteur $\overline{V}$ dont l'origine est au point M (x, y, z) et dont les projections sur les axes de coordonnées sont $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$.

La projection de ce vecteur sur ox' est

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\alpha_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\alpha_3.$$

D'après (2), cette projection est donc $\frac{\partial \Phi}{\partial x'}$.

La valeur absolue maxima de $\frac{\partial \Phi}{\partial x'}$ est obtenue pour la direction ox' confondue avec celle du vecteur $\overline{V}$.

Pour cette direction on a

$$\frac{\alpha_1}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}} = \frac{\alpha_2}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} = \frac{\alpha_3}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}}.$$

La valeur absolue maxima de $\frac{\partial \Phi}{\partial x'}$ atteint ainsi

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}.$$

3. En chaque point de l'espace existe un vecteur analogue au vecteur $\overline{V}$ du point M.

L'ensemble de ces vecteurs $\overline{V}$ constitue un *champ continu de vecteurs dérivant d'un potentiel* Φ.

4. *Généralisation.* — Considérons trois fonctions continues de x, y et z : V_x, V_y et V_z.

Imaginons en chaque point de l'espace le vecteur $\overline{V}$ dont les projections sur ox, oy et oz sont V_x, V_y et V_z.

L'ensemble des vecteurs $\overline{V}$ constitue ainsi un *champ de vecteurs général*, V_x, V_y, V_z ne dérivant plus d'une fonction potentielle.

La projection de $\overline{V}$ sur la direction (α) est donnée par la *formule fon-*

Digitized by Google

damentale linéaire en α_1, α_2, α_3 :

$$V_\alpha = V_x\alpha_1 + V_y\alpha_2 + V_z\alpha_3. \tag{3}$$

La valeur absolue maxima de V_α correspond encore à la direction (α) du vecteur $\overline{V}$.

On a alors

$$\frac{\alpha_1}{V_x} = \frac{\alpha_2}{V_y} = \frac{\alpha_3}{V_z} = \frac{1}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}$$

et

$$V_\alpha = \pm\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}.$$

5. Les *systèmes de vecteurs* et les *champs de vecteurs* jouissent de nombreuses propriétés qui sont devenues classiques actuellement (1).

Nous allons rappeler les définitions suivantes dont nous ferons un constant usage.

6. *Champ de vecteurs résultants.* — Considérons une série de champ de vecteurs $\overline{A}$, $\overline{B}$, ..., $\overline{K}$.

La formule fondamentale de chacun d'eux donne en chaque point de l'espace

$$\begin{aligned} A_\alpha &= A_x\alpha_1 + A_y\alpha_2 + A_z\alpha_3, \\ B_\alpha &= B_x\alpha_1 + B_y\alpha_2 + B_z\alpha_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ K_\alpha &= K_x\alpha_1 + K_y\alpha_2 + K_z\alpha_3. \end{aligned}$$

Faisons la somme de ces relations et posons

$$\Sigma A_\alpha \ldots\ldots = V_\alpha, \qquad \Sigma A_x \ldots\ldots = V_x, \qquad \Sigma A_y \ldots\ldots = V_y, \qquad \Sigma A_z \ldots\ldots = V_z.$$

Nous trouvons

$$V_\alpha = V_x\alpha_1 + V_y\alpha_2 + V_z\alpha_3$$

et l'on écrit $\overline{V} = \overline{A} + \overline{B} + \ldots + \overline{K}$.

---

(1) Consulter à ce sujet :

KŒNIGS, *Leçons de Cinématique,* Théorie des segments (Paris, Hermann, 1897); APPELL, *Cours de Mécanique rationnelle,* T. I et III, Chap. I et XXVIII (Paris, Gauthier-Villars).

Digitized by Google

V_α est donc la composante générale d'un vecteur $\overline{V}$ que nous appellerons *vecteur du champ résultant* des champs composants $\overline{A}$, $\overline{B}$, ..., $\overline{K}$.

En chaque point de l'espace, le vecteur $\overline{V}$ est la résultante géométrique des vecteurs $\overline{A}$, $\overline{B}$, ..., $\overline{K}$.

7. *Produit de deux champs de vecteurs.* — Considérons les deux champs de vecteurs $\overline{A}$ et $\overline{V}$; en chaque point de l'espace, l'expression

$$\overline{A} \times \overline{V} = A_x V_x + A_y V_y + A_z V_z \tag{4}$$

est invariante avec le choix des axes orthogonaux de projection. En effet, (α), (β), (γ) étant trois directions perpendiculaires entre elles, en développant l'expression $(A_\alpha V_\alpha + A_\beta V_\beta + A_\gamma V_\gamma)$ à l'aide de la formule fondamentale des champs $\overline{A}$ et $\overline{V}$, on trouve qu'elle se réduit à $(A_x V_x + A_y V_y + A_z V_z)$, si l'on tient compte des relations connues

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \qquad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0, \qquad \ldots.$$

On peut encore vérifier que $\overline{A} \times \overline{V}$ est le produit de la grandeur d'un des vecteurs par la projection sur sa direction de l'autre vecteur; pour cette raison, $\overline{A} \times \overline{V}$ est appelé *produit des vecteurs* $\overline{A}$ *et* $\overline{V}$.

$\overline{V} \times \overline{V}$ sera le *produit principal* du vecteur $\overline{V}$; il est égal au carré de la grandeur absolue de ce vecteur, puisque

$$\overline{V} \times \overline{V} = (V_x)^2 + (V_y)^2 + (V_z)^2.$$

Remarquons encore que si

$$\overline{A} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \ldots, \qquad \overline{V} = \overline{V_1} + \overline{V_2} + \ldots.$$

l'on a identiquement

$$\begin{aligned}\overline{A} \times \overline{V} &= (\overline{A_1} + \overline{A_2} + \ldots) \times (\overline{V_1} + \overline{V_2} + \ldots) \\ &= \overline{A_1}\,\overline{V_1} + \overline{A_1}\,\overline{V_2} + \ldots + \overline{A_2}\,\overline{V_1} + \overline{A_2}\,\overline{V_2} + \ldots + \ldots.\end{aligned}$$

8. *Moment de deux champs de vecteurs.* — Considérons le vecteur $\overline{M}$ dont les projections sur les axes *oxyz* sont données par les formules sui-

Digitized by Google

vantes

$$(5)\qquad \begin{cases} M_x = V_y A_z - V_z A_y, \\ M_y = V_z A_x - V_x A_z, \\ M_z = V_x A_y - V_y A_x. \end{cases}$$

On peut démontrer que la projection de $\overline{M}$ sur une direction quelconque (α) peut s'écrire

$$(V_\beta A_\gamma - V_\gamma A_\beta),$$

les trois directions (α), (β) et (γ) étant perpendiculaires entre elles. En développant V_β, A_γ, V_γ et A_β par la formule fondamentale (3), on trouvera, en effet,

$$V_\beta A_\gamma - V_\gamma A_\beta = M_x \alpha_1 + M_y \alpha_2 + M_z \alpha_3.$$

Traçons par le point M un vecteur équipollent à $\overline{A}$, puis, par l'extrémité de celui-ci, un vecteur équipollent à $\overline{V}$. Dans ces conditions $\overline{M}$ est le *moment* du vecteur $\overline{V}$ par rapport au point M. Nous dirons encore que $\overline{M}$ est le moment du vecteur $\overline{V}$ dans une position définie par le vecteur $\overline{A}$ (¹).

A l'aide de (5), on trouve les relations

$$(\overline{M} \times \overline{A}) = M_x A_x + M_y A_y + M_z A_z = 0,$$
$$(\overline{M} \times \overline{V}) = M_x V_x + M_y V_y + M_z V_z = 0,$$

qui prouvent que les vecteurs $\overline{M}$ et $\overline{A}$, $\overline{M}$ et $\overline{V}$ sont perpendiculaires entre eux.

II. — Représentation des dérivées partielles du premier ordre d'un champ de vecteurs.

9. *Dérivées partielles dans le système d'axes oxyz.* — Les neuf dérivées partielles des composantes d'un champ de vecteurs sont les suivantes :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x},\ \frac{\partial V_y}{\partial y},\ \frac{\partial V_z}{\partial z},\ \frac{\partial V_x}{\partial y},\ \frac{\partial V_x}{\partial z},\ \frac{\partial V_y}{\partial z},\ \frac{\partial V_y}{\partial x},\ \frac{\partial V_z}{\partial x},\ \frac{\partial V_z}{\partial y}.$$

(¹) Nous ne pouvons malheureusement pas définir $\overline{M}$ comme le moment des deux vecteurs $\overline{V}$ et $\overline{A}$, cette définition étant déjà utilisée dans un autre sens dans la théorie des segments. (*Voir*, par exemple, KŒNIGS, *loc. cit.*, p. 5.)

Digitized by Google

Nous allons utiliser les notations suivantes :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)=\frac{\partial V_x}{\partial x}=V_{xx},$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)=\frac{\partial V_y}{\partial y}=V_{yy},$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)=\frac{\partial V_z}{\partial z}=V_{zz},$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)=V_{yz},$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}+\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)=V_{zx},$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)=V_{xy},$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)=T_{yz},$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)=T_{zx},$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)=T_{xy}.$$

On a identiquement

$$V_{yz}=V_{zy},\quad V_{zx}=V_{xz},\quad V_{xy}=V_{yx},$$
$$T_{yz}=-T_{zy},\quad T_{zx}=-T_{xy},\quad T_{xy}=-T_{yx},$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial z}=V_{yz}+T_{yz},\quad \frac{\partial V_z}{\partial x}=V_{zx}+T_{zx},\quad \frac{\partial V_x}{\partial y}=V_{xy}+T_{xy},$$
$$\frac{\partial V_z}{\partial y}=V_{zy}+T_{zy},\quad \frac{\partial V_x}{\partial z}=V_{xz}+T_{xz},\quad \frac{\partial V_y}{\partial x}=V_{yx}+T_{yx}.$$

10. *Dérivées partielles dans un système d'axes quelconques.* — Considérons les deux systèmes d'axes orthogonaux $ox_\alpha y_\alpha z_\alpha$ et $ox_\beta y_\beta z_\beta$ définis par les substitutions orthogonales $(\alpha)(\alpha')(\alpha'')$, $(\beta)(\beta')(\beta'')$ par rapport au système d'axes $oxyz$.

On peut écrire la valeur de V_β en prenant comme variables indépendantes, soit xyz, soit $x_\alpha y_\alpha z_\alpha$.

On en conclut les relations

$$\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial V_\beta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial V_\beta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial V_\beta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_\alpha},$$

Digitized by Google

mais l'on a

$$x = \alpha_1 x_\alpha + \alpha'_1 y_\alpha + \alpha''_1 z_\alpha,$$
$$y = \alpha_2 x_\alpha + \alpha'_2 y_\alpha + \alpha''_2 z_\alpha,$$
$$z = \alpha_3 x_\alpha + \alpha'_3 y_\alpha + \alpha''_3 z_\alpha,$$

d'où, par dérivation partielle,

$$\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial V_\beta}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial V_\beta}{\partial y}\alpha_2 + \frac{\partial V_\beta}{\partial z}\alpha_3. \tag{6}$$

La dérivée $\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}$ est donc déterminée sans ambiguïté par la connaissance des dérivées partielles par rapport au système d'axes $oxyz$ et par la direction (α) de ox_α.

Dans ces conditions posons d'une façon générale, étant données les deux directions quelconques (α) et (β),

$$V_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}\right),$$
$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}\right).$$

Ces définitions donnent

$$V_{\alpha\beta} = V_{\beta\alpha} \quad \text{et} \quad T_{\alpha\beta} = -T_{\beta\alpha},$$

$$V_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha}\right) = \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha},$$
$$T_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} = V_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}, \qquad \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} = V_{\beta\alpha} + T_{\beta\alpha}.$$

CALCUL DE $\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}$. — *Formule fondamentale d'un champ bilinéaire dérivant d'un champ de vecteurs.*

11. De la formule fondamentale des champs de vecteurs on tire

$$V_\beta = V_x\beta_1 + V_y\beta_2 + V_z\beta_3.$$

Digitized by Google

En dérivant partiellement en x, y et z, on obtient

$$\frac{\partial V_\beta}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial x}\beta_1 + \frac{\partial V_y}{\partial x}\beta_2 + \frac{\partial V_z}{\partial x}\beta_3,$$
$$\frac{\partial V_\beta}{\partial y} = \frac{\partial V_x}{\partial y}\beta_1 + \frac{\partial V_y}{\partial y}\beta_2 + \frac{\partial V_z}{\partial y}\beta_3,$$
$$\frac{\partial V_\beta}{\partial z} = \frac{\partial V_x}{\partial z}\beta_1 + \frac{\partial V_y}{\partial z}\beta_2 + \frac{\partial V_z}{\partial z}\beta_3,$$

et par suite dans (6),

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} &= \frac{\partial V_x}{\partial x}\alpha_1\beta_1 + \frac{\partial V_y}{\partial y}\alpha_2\beta_2 + \frac{\partial V_z}{\partial z}\alpha_3\beta_3 \\ &\quad + \frac{\partial V_z}{\partial y}\alpha_2\beta_3 + \frac{\partial V_y}{\partial z}\alpha_3\beta_2 + \frac{\partial V_x}{\partial z}\alpha_3\beta_1 + \frac{\partial V_z}{\partial x}\alpha_1\beta_3 + \frac{\partial V_y}{\partial x}\alpha_1\beta_2 + \frac{\partial V_x}{\partial y}\alpha_2\beta_1. \end{aligned} \right.$$

C'est la *formule fondamentale d'un champ bilinéaire dérivant d'un champ de vecteurs* $\overline{V}$.

Nous étudierons ce champ bilinéaire en passant par l'intermédiaire des fonctions $V_{\beta\alpha}$ et $T_{\beta\alpha}$ qui composent $\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}$.

CALCUL DE $V_{\alpha\beta}$ EN FONCTION DE $V_{xx}V_{yy}V_{zz}V_{yz}V_{zx}$ ET V_{xy}. — *Formule fondamentale des champs bilinéaires quadratiques dérivant d'un champ de vecteurs. Divergence.*

12. On peut obtenir $\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta}$ en permutant dans (7) les indices α et β.

On en tire par addition

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}\right) \\ &= \frac{\partial V_x}{\partial x}\alpha_1\beta_1 + \frac{\partial V_y}{\partial y}\alpha_2\beta_2 + \frac{\partial V_z}{\partial z}\alpha_3\beta_3 \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right)(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right)(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1), \end{aligned}$$

ce que l'on peut donc écrire

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} V_{\alpha\beta} &= V_{xx}\alpha_1\beta_1 + V_{yy}\alpha_2\beta_2 + V_{zz}\alpha_3\beta_3 \\ &\quad + V_{yz}(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) + V_{zx}(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) + V_{xy}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1); \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

c'est la *formule fondamentale du champ bilinéaire quadratique, dérivant d'un champ des vecteurs;* elle donne $V_{\alpha\beta}$ en fonction des six fonctions $V_{xx}V_{yy}V_{zz}V_{yz}V_{zx}V_{xy}$. $V_{\alpha\beta}$ ne dépend donc pas de $T_{yz}T_{zx}T_{xy}$.

Dans le cas où les directions (α) et (β) sont confondues, la formule (8) devient

$$(9) \qquad V_{\alpha\alpha} = V_{xx}\alpha_1^2 + V_{yy}\alpha_2^2 + V_{zz}\alpha_3^2 + 2(V_{yz}\alpha_2\alpha_3 + Y_{zx}\alpha_3\alpha_1 + V_{xy}\alpha_1\alpha_2).$$

On peut remarquer que le développement (8) est la forme polaire du développement (9).

On a

$$V_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha_1}\beta_1 + \frac{\partial V_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha_2}\beta_2 + \frac{\partial V_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha_3}\beta_3\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_{\beta\beta}}{\partial\beta_1}\alpha_1 + \frac{\partial V_{\beta\beta}}{\partial\beta_2}\alpha_2 + \frac{\partial V_{\beta\beta}}{\partial\beta_3}\alpha_3\right).$$

13. *Divergence.* — Évaluons la somme $V = V_{\alpha\alpha} + V_{\beta\beta} + V_{\gamma\gamma}$.

On obtient à l'aide de la formule fondamentale (9)

$$V = V_{\alpha\alpha} + V_{\beta\beta} + V_{\gamma\gamma} = V_{xx}(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) + V_{yy}(\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2)$$
$$+ V_{zz}(\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2) + 2V_{yz}(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3)$$
$$+ 2V_{zx}(\alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1) + 2V_{xy}(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2).$$

Si les trois directions (α) (β) et (γ) sont orthogonales, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \qquad \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il vient donc

$$V = V_{\alpha\alpha} + V_{\beta\beta} + V_{\gamma\gamma} = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz}.$$

La valeur de V est donc indépendante du choix des directions orthogonales (α) (β) (γ).

V est appelée la *divergence* du vecteur $\overline{V}$.

CALCUL DE $T_{\alpha\beta}$ EN FONCTION DE $T_{yz}T_{zx}T_{xy}$. — *Formule fondamentale des champs bilinéaires tourbillonnaires dérivant d'un champ de vecteurs; vecteur-tourbillon.*

Digitized by Google

14. On obtient à l'aide de (7)

$$T_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta}-\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}\right)= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1),$$

ce qui peut s'écrire

$$(10)\qquad T_{\alpha\beta}=T_{yz}(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)+T_{zx}(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)+T_{xy}(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1);$$

c'est la *formule fondamentale du champ tourbillonnaire dérivant du champ des vecteurs* $\overline{V}$.

On voit que $T_{\alpha\beta}$ n'est fonction que de T_{yz}, T_{zx} et T_{xy}.

15. *Vecteur-tourbillon.* — Les directions (α) et (β) étant perpendiculaires entre elles, soient (γ) les cosinus directeurs de la normale à leur plan, tracée dans le sens tel que l'on a

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}=+1.$$

Dans ces conditions les relations suivantes sont vérifiées

$$\gamma_1=\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2,$$
$$\gamma_2=\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3,$$
$$\gamma_3=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1.$$

Par suite dans (10)

$$(11)\qquad T_{\alpha\beta}=T_{yz}\gamma_1+T_{zx}\gamma_2+T_{xy}\gamma_3,$$

$T_{\alpha\beta}$ est donc alors la composante suivant la direction (γ) d'un vecteur $\overline{T}$ dont les projections sur ox, oy et oz sont respectivement T_{yz}, T_{zx}, T_{xy}.

Ce vecteur $\overline{T}$ est appelé le *vecteur-tourbillon* du vecteur $\overline{V}$.

On peut vérifier que la divergence du vecteur-tourbillon est nulle.

On a en effet

$$\frac{\partial T_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial T_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial z}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)\right]=0 \text{ identiquement.}$$

Digitized by Google

III. — Généralisation. — Champs continus bilinéaires quadratiques et tourbillonnaires.

16. — Dans les formules fondamentales (8) et (10), les fonctions V_{xx}, V_{yy}, V_{zz}, V_{yz}, V_{zx}, V_{xy}, T_{yz}, T_{zx}, T_{xy} sont unies par certaines relations, car elles dérivent du champ des vecteurs $\overline{V}$.

On peut imaginer la généralisation suivante :

Considérons neuf fonctions de xyz continues et absolument indépendantes $A_1, A_2, \ldots, A_9$.

Étant données deux directions (α) et (β), écrivons la *formule fondamentale* homogène du deuxième degré par rapport aux six cosinus directeurs des deux directions (α) et (β)

$$(12)\qquad \begin{cases} A_{\alpha\beta} = A_1\alpha_1\beta_1 + A_2\alpha_2\beta_2 + A_3\alpha_3\beta_3 + A_4\alpha_2\beta_3 \\ \qquad + A_5\alpha_3\beta_2 + A_6\alpha_3\beta_1 + A_7\alpha_1\beta_3 + A_8\alpha_1\beta_2 + A_9\alpha_2\beta_1. \end{cases}$$

L'ensemble des fonctions $A_{\alpha\beta}$ constituera les éléments d'un champ continu *bilinéaire* [deux lignes : (α) et (β)].

Faisons correspondre à la fonction $A_{\alpha\beta}$, le *déterminant fonctionnel* Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & A_8 & A_7 \\ A_9 & A_2 & A_4 \\ A_6 & A_5 & A_3 \end{vmatrix}$$

obtenu de la manière suivante :

On écrit la formule (12) en groupant les termes en α_1, α_2, α_3, et en ordonnant chaque coefficient par rapport à β_1, β_2, β_3,

$$A_{\alpha\beta} = \alpha_1[A_1\beta_1 + A_8\beta_2 + A_7\beta_3] + \alpha_2[A_9\beta_1 + A_2\beta_2 + A_4\beta_3] + \alpha_3[A_6\beta_1 + A_5\beta_2 + A_3\beta_3].$$

Les éléments de la première, de la deuxième et de la troisième ligne de Δ correspondent aux coefficients de α_1, α_2 et α_3.

Lorsque le déterminant Δ est *symétrique*, on dira que le champ bilinéaire correspondant est *symétrique* ou *quadratique*.

Les conditions à remplir sont les suivantes :

$$A_8 = A_9, \qquad A_6 = A_7, \qquad A_4 = A_5.$$

Le champ est dit *quadratique*, car il est défini complètement par la

Digitized by Google

forme quadratique suivante :

$$A_1x^2+A_2y^2+A_3z^2+2(A_4yz+A_6zx+A_8xy),$$

dont Δ est aussi le déterminant fonctionnel.

Lorsque le déterminant Δ est *symétrique gauche*, on dira que le champ bilinéaire correspondant est *symétrique gauche* ou *tourbillonnaire*.

Conditions à remplir :

$$A_1=A_2=A_3=0,$$

$$A_8=-A_9, \qquad A_6=-A_7, \qquad A_4=-A_5.$$

Le champ est dit *tourbillonnaire*, car un vecteur de projections A_4 et A_6 et A_8 sur les axes ox, oy, oz suffit pour le déterminer complètement. Dans le cas où le champ bilinéaire dérive d'un champ de vecteurs $\overline{V}$, ce vecteur $(A_4A_6A_8)$ est le vecteur-tourbillon du vecteur $\overline{V}$.

17. On peut toujours faire correspondre à un champ bilinéaire quelconque un champ quadratique et un champ tourbillonnaire qui le déterminent complètement.

Posons en effet

$$P_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(A_{\alpha\beta}+A_{\beta\alpha}), \qquad T_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(A_{\alpha\beta}-A_{\beta\alpha}).$$

Cette définition nous donne

$$P_{\alpha\beta}=P_{\beta\alpha}, \qquad T_{\alpha\beta}=-T_{\beta\alpha}$$

et

$$A_{\alpha\beta}=P_{\alpha\beta}+T_{\alpha\beta}.$$

Les fonctions $P_{\alpha\beta}$ et $T_{\alpha\beta}$ déterminent donc $A_{\alpha\beta}$.

On tire en particulier pour les directions des axes, à l'aide de (12) :

$$A_{xx}=P_{xx}=A_1, \qquad A_{yy}=P_{yy}=A_2, \qquad A_{zz}=P_{zz}=A_3,$$

$$T_{xx}=T_{yy}=T_{zz}=0,$$

$$A_{yz}=P_{yz}+T_{yz}=A_4, \qquad A_{zx}=P_{zx}+T_{zx}=A_6, \qquad A_{xy}=P_{xy}+T_{xy}=A_8,$$
$$A_{zy}=P_{zy}+T_{zy}=A_5, \qquad A_{xz}=P_{xz}+T_{xz}=A_7, \qquad A_{yx}=P_{yx}+T_{yx}=A_9,$$

$$P_{yz}=\frac{1}{2}(A_4+A_5), \qquad P_{zx}=\frac{1}{2}(A_6+A_7), \qquad P_{xy}=\frac{1}{2}(A_8+A_9),$$

$$T_{yz}=\frac{1}{2}(A_4-A_5), \qquad T_{zx}=\frac{1}{2}(A_6-A_7), \qquad T_{xy}=\frac{1}{2}(A_8-A_9),$$

Digitized by Google

$P_{\alpha\beta}$ est la fonction générale d'un champ quadratique et $T_{\alpha\beta}$ celle d'un champ tourbillonnaire.

On trouve, en effet, à l'aide de (12),

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}) &= A_1\alpha_1\beta_1 + A_2\alpha_2\beta_2 + A_3\alpha_3\beta_3 \\ &+ \frac{1}{2}(A_4 + A_5)(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) + \frac{1}{2}(A_6 + A_7)(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) \\ &+ \frac{1}{2}(A_8 + A_9)(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1), \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} P_{\alpha\beta} = {} & P_{xx}\alpha_1\beta_1 + P_{yy}\alpha_2\beta_2 + P_{zz}\alpha_3\beta_3 \\ & + P_{yz}(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) + P_{zx}(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) + P_{xy}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1). \end{aligned} \right.$$

C'est bien la formule fondamentale d'un champ bilinéaire symétrique.

De même,

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}) &= \frac{1}{2}(A_4 - A_5)(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) \\ &+ \frac{1}{2}(A_6 - A_7)(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + \frac{1}{2}(A_8 - A_9)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \end{aligned}$$

ou bien

$$(14)\qquad T_{\alpha\beta} = T_{yz}(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + T_{zx}(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + T_{xy}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1),$$

c'est la formule fondamentale d'un champ bilinéaire symétrique gauche.

18. A l'aide des formules fondamentales (13) et (14), nous allons étudier en détail les champs quadratiques et les champs tourbillonnaires.

Nous distinguerons un champ quadratique par la notation suivante :

$$\overline{\overline{P}}$$

(lettre P du champ surmontée de deux barres) et un champ tourbillonnaire par la notation

$$\cong\!\!\!

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES CHAMPS CONTINUS BILINÉAIRES SYMÉTRIQUES OU QUADRATIQUES.

I. — Vecteurs-Pression.

19. Considérons le champ quadratique $\overline{\overline{P}}$ défini par la formule fondamentale

$$(1)\qquad \begin{cases} P_{\alpha\beta} = P_{xx}\alpha_1\beta_1 + P_{yy}\alpha_2\beta_2 + P_{zz}\alpha_3\beta_3 + P_{yz}(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) \\ \qquad + P_{zx}(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) + P_{xy}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1). \end{cases}$$

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Pour toutes les directions* (β), *les fonctions* $P_{\alpha\beta}$ *peuvent être regardées comme les projections sur les directions* (β), *d'un même vecteur* $\overline{P_\alpha}$ *de l'espace.*

La formule fondamentale donne, en effet,

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta} = {} & (P_{xx}\alpha_1 + P_{xy}\alpha_2 + P_{xz}\alpha_3)\beta_1 \\ & + (P_{yx}\alpha_1 + P_{yy}\alpha_2 + P_{yz}\alpha_3)\beta_2 \\ & + (P_{zx}\alpha_1 + P_{zy}\alpha_2 + P_{zz}\alpha_3)\beta_3. \end{aligned}$$

D'après la formule fondamentale des champs de vecteurs, $P_{\alpha\beta}$ est donc la projection sur la direction (β) d'un vecteur $\overline{P_\alpha}$ qui a pour projections, sur ox, oy et oz, les expressions

$$\begin{aligned} & P_{xx}\alpha_1 + P_{xy}\alpha_2 + P_{xz}\alpha_3, \\ & P_{yx}\alpha_1 + P_{yy}\alpha_2 + P_{yz}\alpha_3, \\ & P_{zx}\alpha_1 + P_{zy}\alpha_2 + P_{zz}\alpha_3. \end{aligned}$$

D'après la formule fondamentale du champ $\overline{\overline{P}}$, ces expressions peuvent s'écrire $P_{\alpha x}$, $P_{\alpha y}$ et $P_{\alpha z}$.

On a donc

$$P_{\alpha\beta} = P_{\alpha x}\beta_1 + P_{\alpha y}\beta_2 + P_{\alpha z}\beta_3.$$

Digitized by Google

20. *Définitions.* — Le vecteur $\overline{P_\alpha}$ est appelé *pression au point* M *dans la direction* (α).

La projection de $\overline{P_\alpha}$ sur la direction (α) est la *composante normale* de la pression. Elle vaut $P_{\alpha\alpha}$.

La projection de $\overline{P_\alpha}$ sur le plan perpendiculaire à la direction (α) est la *composante tangentielle* de la pression.

21. Théorème. — *Les pressions, dans deux directions* (α) *et* $(-\alpha)$ *directement opposées, sont des vecteurs égaux et directement opposés.*

On tire, en effet, de la relation fondamentale (12),

$$P_{-\alpha\alpha} = -P_{\alpha\alpha},$$
$$P_{-\alpha\beta} = -P_{\alpha\beta},$$
$$P_{-\alpha\gamma} = -P_{\alpha\gamma}.$$

Les projections de $\overline{P_{-\alpha}}$ et $\overline{P_\alpha}$ sur trois directions quelconques, par exemple perpendiculaires entre elles, étant égales et de signe contraire, ces deux vecteurs sont égaux et directement opposés.

22. *Représentation des pressions autour d'un point.* — On peut, comme on sait, représenter les pressions autour d'un point à l'aide de quadriques (1). Nous citerons ici la *quadrique directrice.*

Menons par M trois axes MXYZ parallèles à $oxyz$, et portons sur la direction (α) un segment $\overline{MQ}$ dont la grandeur est donnée par la relation

$$MQ = \frac{H}{\sqrt{\pm P_{\alpha\alpha}}}, \tag{2}$$

H étant une quantité positive et le signe + ou le signe — étant choisi suivant que $P_{\alpha\alpha}$ est positif ou négatif.

Les coordonnées (X, Y, Z) du point Q sont données par les relations

$$\frac{X}{\alpha_1} = \frac{Y}{\alpha_2} = \frac{Z}{\alpha_3} = \frac{H}{\sqrt{\pm P_{\alpha\alpha}}}. \tag{3}$$

---

(1) *Voir,* par exemple, à ce sujet : Appell, *Mécanique,* T. III, p. 129 et suivantes. *Nos* pressions n'ont pas le sens physique suivant lequel ces vecteurs sont habituellement définis. Mais la représentation géométrique qui nous intéresse ici est la même.

Digitized by Google

On obtient le lieu du point Q en éliminant α_1, α_2, α_3 de la relation fondamentale (1) donnant $P_{\alpha\alpha}$, à l'aide des relations (3).

On est ainsi conduit aux *quadriques conjuguées*

$$P_{xx}X^2 + P_{yy}Y^2 + P_{zz}Z^2 + 2(P_{yz}YZ + P_{zx}ZX + P_{xy}XY) = \pm H^2.$$

L'ensemble de ces quadriques constitue la *quadrique directrice* des pressions normales.

On peut démontrer que $\overline{P}_\alpha$ est *perpendiculaire au plan diamétral conjugué de la direction* (α) *dans la quadrique directrice.*

Le *sens* de $\overline{P_\alpha}$ est déterminé par le signe de $P_{\alpha\alpha}$, et la *grandeur* de ce vecteur par celle de sa projection $P_{\alpha\alpha}$ sur la direction (α); on voit donc que la quadrique directrice détermine complétement la pression totale $\overline{P}_\alpha$.

23. *Directions et pressions principales.* — Les trois directions orthogonales des axes de la quadrique directrice sont telles que les pressions suivant ces directions se réduisent à leurs composantes normales : pour les directions des axes, les plans diamétraux conjugués sont en effet perpendiculaires à ces directions.

Les axes de la quadrique directrice constituent les *directions principales* en M, et les pressions correspondantes sont les *pressions principales:*

Rapportée à ses axes, l'équation de la quadrique directrice prend la forme

$$P_{xx}X^2 + P_{yy}Y^2 + P_{zz}Z^2 = \pm H^2. \qquad (4)$$

24. *Pression cubique et pression moyenne.* — Par une démonstration identique à celle de l'existence de la divergence du vecteur $\overline{V}$ (n° **13**) on peut prouver que la somme des trois pressions normales $(P_{\alpha\alpha} + P_{\beta\beta} + P_{\gamma\gamma})$ correspondant à trois directions (α) (β) (γ) perpendiculaires entre elles est invariante avec le choix de ces directions orthogonales.

Elle vaut donc aussi la somme des trois pressions principales.

Nous la noterons P et nous l'appellerons *pression cubique* au point M.

Le tiers de la pression cubique sera la *pression moyenne* en M.

25. *Champ quadratique complémentaire.* — Considérons un champ

Digitized by Google

quadratique $\overline{\overline{\mathrm{P}}}$, $\mathrm{P}_{\alpha\beta}$ étant la composante générale de la pression et P la pression cubique.

Posons

$$\mathrm{P}'_{\alpha\beta} + \mathrm{P}_{\alpha\beta} = \mathrm{P}(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3). \tag{5}$$

Nous allons démontrer que $\mathrm{P}'_{\alpha\beta}$ est la composante générale de la pression dans un champ $\overline{\overline{\mathrm{P}'}}$ que nous appellerons *champ quadratique complémentaire du champ* $\overline{\overline{\mathrm{P}}}$.

A l'aide de la formule fondamentale des champs $\overline{\overline{\mathrm{P}}}$, on peut écrire, en effet, dans (5) :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}'_{\alpha\beta} = {} & (\mathrm{P}_{xx} + \mathrm{P}_{yy} + \mathrm{P}_{zz})(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) \\ & - [\mathrm{P}_{xx}\alpha_1\beta_1 + \mathrm{P}_{yy}\alpha_2\beta_2 + \mathrm{P}_{zz}\alpha_3\beta_3 + \mathrm{P}_{yz}(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) \\ & \qquad + \mathrm{P}_{zx}(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) + \mathrm{P}_{xy}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)],\end{aligned}$$

ou bien

$$\left\{\begin{aligned}\mathrm{P}'_{\alpha\beta} = {} & (\mathrm{P}_{yy} + \mathrm{P}_{zz})\alpha_1\beta_1 + (\mathrm{P}_{zz} + \mathrm{P}_{xx})\alpha_2\beta_2 + (\mathrm{P}_{xx} + \mathrm{P}_{yy})\alpha_3\beta_3 \\ & - \mathrm{P}_{yz}(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) - \mathrm{P}_{zx}(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) - \mathrm{P}_{xy}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1).\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Mais on peut tirer de (5)

$$\mathrm{P}'_{\alpha\alpha} + \mathrm{P}_{\alpha\alpha} = \mathrm{P}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) = \mathrm{P}.$$

Si (α), (β) et (γ) sont trois directions orthogonales, on en conclut

$$\mathrm{P}'_{\alpha\alpha} + \mathrm{P}_{\alpha\alpha} = \mathrm{P} = \mathrm{P}_{\alpha\alpha} + \mathrm{P}_{\beta\beta} + \mathrm{P}_{\gamma\gamma}.$$

D'où

$$\mathrm{P}'_{\alpha\alpha} = \mathrm{P}_{\beta\beta} + \mathrm{P}_{\gamma\gamma},$$

et, en particulier,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}'_{xx} &= \mathrm{P}_{yy} + \mathrm{P}_{zz}, \\ \mathrm{P}'_{yy} &= \mathrm{P}_{zz} + \mathrm{P}_{xx}, \\ \mathrm{P}'_{zz} &= \mathrm{P}_{xx} + \mathrm{P}_{yy}.\end{aligned}$$

D'un autre côté, (α) et (β) étant deux directions orthogonales

$$\mathrm{P}'_{\alpha\beta} + \mathrm{P}_{\alpha\beta} = \mathrm{P}(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) = 0,$$

$$\mathrm{P}'_{\alpha\beta} = -\mathrm{P}_{\alpha\beta},$$

en particulier

$$\begin{aligned}\mathrm{P}'_{yz} &= -\mathrm{P}_{yz}, \\ \mathrm{P}'_{zx} &= -\mathrm{P}_{zx}, \\ \mathrm{P}'_{xy} &= -\mathrm{P}_{xy}.\end{aligned}$$

Digitized by Google

On en conclut enfin dans (6)

$$P'_{\alpha\beta} = P'_{xx}\alpha_1\beta_1 + P'_{yy}\alpha_2\beta_2 + P'_{zz}\alpha_3\beta_3 + P'_{yz}(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) + P'_{zx}(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) + P'_{xy}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1).$$

C'est bien la formule fondamentale qui démontre l'existence du champ quadratique $\overline{\overline{P'}}$.

II. — Vecteur-Force.

26. *Définition.* — Considérons le champ des vecteurs-pression $\overline{P_x}$. Leur divergence a pour expression

$$I_x = \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z}.$$

De même, la divergence des vecteurs $\overline{P_y}$ est

$$I_y = \frac{\partial P_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial z}$$

et celle des vecteurs $\overline{P_z}$

$$I_z = \frac{\partial P_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z}.$$

On peut construire le vecteur $\bar{I}$ de l'espace dont les trois projections sur ox, oy et oz sont I_x, I_y et I_z; nous l'appellerons *vecteur-force* au point considéré.

Théorème. — *La projection de* $\bar{I}$ *sur la direction* (α) *est la divergence* I_α *du champ des vecteurs* $\overline{P_\alpha}$.

On a par définition

$$I_\alpha = \frac{\partial P_{\alpha x}}{\partial x} + \frac{\partial P_{\alpha y}}{\partial y} + \frac{\partial P_{\alpha z}}{\partial z}.$$

La formule fondamentale des champs quadratiques donne

$$P_{\alpha x} = P_{xx}\alpha_1 + P_{yx}\alpha_2 + P_{zx}\alpha_3.$$

D'où

$$\frac{\partial P_{\alpha x}}{\partial x} = \frac{\partial P_{xx}}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial P_{yx}}{\partial x}\alpha_2 + \frac{\partial P_{zx}}{\partial x}\alpha_3$$

Digitized by Google

et de même

$$\frac{\partial P_{\alpha y}}{\partial y} = \frac{\partial P_{xy}}{\partial y}\alpha_1 + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y}\alpha_2 + \frac{\partial P_{zy}}{\partial y}\alpha_3,$$
$$\frac{\partial P_{\alpha z}}{\partial z} = \frac{\partial P_{xz}}{\partial z}\alpha_1 + \frac{\partial P_{yz}}{\partial z}\alpha_2 + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z}\alpha_3.$$

On obtient par addition

$$I_\alpha = I_x\alpha_1 + I_y\alpha_2 + I_z\alpha_3;$$

c'est la relation fondamentale prouvant que I_α est la projection du vecteur $\bar{I}$ sur la direction (α).

27. THÉORÈME. — *La résultante géométrique des vecteurs-force du champ* $\bar{\bar{P}}$ *et de son champ complémentaire* $\bar{\bar{P}}'$ *est le vecteur dérivant du potentiel* P, *pression cubique du champ* $\bar{\bar{P}}$.

En effet, $\bar{I}$ et $\bar{I}'$ étant les deux vecteurs-force considérés, on a

$$I_x = \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z},$$
$$I'_x = \frac{\partial P'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P'_{xz}}{\partial z}.$$

Par suite

$$I_x + I'_x = \frac{\partial(P_{xx} + P'_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(P_{xy} + P'_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(P_{xz} + P'_{xz})}{\partial z}.$$

Mais d'après la relation (5) (n° **25**) on a, en chaque point de l'espace,

$$P_{xx} + P'_{xx} = P,$$
$$P_{xy} + P'_{xy} = 0,$$
$$P_{xz} + P'_{xz} = 0.$$

Il vient donc

$$I_x + I'_x = \frac{\partial P}{\partial x}.$$

De même

$$I_y + I'_y = \frac{\partial P}{\partial y},$$
$$I_z + I'_z = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Le théorème est donc démontré.

Digitized by Google

III. — Champ quadratique résultant.

28. Considérons une série de champs quadratiques $\overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{B}}$, ..., $\overline{\overline{K}}$ et les formules fondamentales

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta} &= A_{xx}\alpha_1\beta_1 + \ldots + A_{xy}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1), \\ B_{\alpha\beta} &= B_{xx}\alpha_1\beta_1 + \ldots + B_{xy}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ K_{\alpha\beta} &= K_{xx}\alpha_1\beta_1 + \ldots + K_{xy}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1). \end{aligned}$$

Faisons la somme de ces relations et posons

$$\Sigma A_{\alpha\beta}\ldots = P_{\alpha\beta},$$

$$\Sigma A_{xx}\ldots = P_{xx}, \quad \ldots, \quad \Sigma A_{xy}\ldots = P_{xy}.$$

Nous obtiendrons

$$P_{\alpha\beta} = P_{xx}\alpha_1\beta_1 + \ldots + P_{xy}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1).$$

$P_{\alpha\beta}$ est donc la fonction générale d'un champ quadratique $\overline{\overline{P}}$, que nous appellerons *champ résultant* des champs composants $\overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{B}}$, ..., $\overline{\overline{K}}$.

On établira aisément les propositions suivantes :

I. *La pression* $\overline{P_\alpha}$ *dans le champ résultant est la résultante géométrique des pressions* $\overline{A_\alpha}$, ..., $\overline{K_\alpha}$, *suivant la même direction* (α), *dans les champs composants.*

II. *Le vecteur-force du champ résultant est la résultante géométrique des vecteurs-force des divers champs composants.*

Nous noterons symboliquement

$$\overline{\overline{P}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} + \ldots + \overline{\overline{K}}.$$

IV. — Produits de champs quadratiques et de champs de vecteurs.

a. Produit de deux champs quadratiques $\overline{\overline{A}}$ et $\overline{\overline{P}}$.

29. Généralisons la notion de produit de deux champs de vecteurs $\overline{A}$ et $\overline{V}$ (n° **7**) en appelant produit de deux champs quadratiques $\overline{\overline{A}}$ et $\overline{\overline{P}}$,

Digitized by Google

l'expression

$$(\overline{\overline{A}} \times \overline{\overline{P}}) = A_{xx}P_{xx} + A_{yy}P_{yy} + A_{zz}P_{zz} + 2(A_{yz}P_{yz} + A_{zx}P_{zx} + A_{xy}P_{xy}).$$

Il nous faut montrer pour cela que la valeur de $(\overline{\overline{A}} \times \overline{\overline{P}})$ ne change pas lorsqu'on substitue, aux axes $oxyz$, un système quelconque de trois directions orthogonales (α), (β) et (γ).

On peut écrire

$$\begin{aligned}
&A_{xx}P_{\alpha\alpha} + A_{\beta\beta}P_{\beta\beta} + A_{\gamma\gamma}P_{\gamma\gamma} + 2(A_{\beta\gamma}P_{\beta\gamma} + A_{\gamma x}P_{\gamma\alpha} + A_{x\beta}P_{\alpha\beta}) \\
&\quad = (A_{\alpha x}P_{\alpha\alpha} + A_{x\beta}P_{\alpha\beta} + A_{x\gamma}P_{\alpha\gamma}) + (A_{\beta x}P_{\beta\alpha} + A_{\beta\beta}P_{\beta\beta} + A_{\beta\gamma}P_{\beta\gamma}) \\
&\qquad\qquad + (A_{\gamma\alpha}P_{\gamma\alpha} + A_{\gamma\beta}P_{\gamma\beta} + A_{\gamma\gamma}P_{\gamma\gamma}) \\
&\quad = (\overline{A_\alpha} \times \overline{P_\alpha} + \overline{A_\beta} \times \overline{P_\beta} + \overline{A_\gamma} \times \overline{P_\gamma}) \qquad \text{(d'après le n° 7).}
\end{aligned}$$

On peut écrire ensuite

$$\begin{aligned}
&\overline{A_x} \times \overline{P_\alpha} + \overline{A_\beta} \times \overline{P_\beta} + \overline{A_\gamma} \times \overline{P_\gamma} \\
&\quad = (A_{\alpha x}P_{\alpha x} + A_{\alpha y}P_{\alpha y} + A_{\alpha z}P_{\alpha z}) + (A_{\beta x}P_{\beta x} + A_{\beta y}P_{\beta y} + A_{\beta z}P_{\beta z}) \\
&\qquad + (A_{\gamma x}P_{\gamma x} + A_{\gamma y}P_{\gamma y} + A_{\gamma z}P_{\gamma z}) \\
&\quad = (A_{x\alpha}P_{x\alpha} + A_{x\beta}P_{x\beta} + A_{x\gamma}P_{x\gamma}) + (A_{y\alpha}P_{y\alpha} + A_{y\beta}P_{y\beta} + A_{y\gamma}P_{y\gamma}) \\
&\qquad + (A_{z\alpha}P_{z\alpha} + A_{z\beta}P_{z\beta} + A_{z\gamma}P_{z\gamma}) \\
&\quad = \overline{A_x} \times \overline{P_x} + \overline{A_y} \times \overline{P_y} + \overline{A_z} \times \overline{P_z} \\
&\quad = (A_{xx}P_{xx} + A_{xy}P_{xy} + A_{xz}P_{xz}) + (A_{yx}P_{yx} + A_{yy}P_{yy} + A_{yz}P_{yz}) \\
&\qquad + (A_{zx}P_{zx} + A_{zy}P_{zy} + A_{zz}P_{zz}) \\
&\quad = A_{xx}P_{xx} + A_{yy}P_{yy} + A_{zz}P_{zz} + 2(A_{yz}P_{yz} + A_{zx}P_{zx} + A_{xy}P_{xy}) \\
&\quad = \overline{\overline{A}} \times \overline{\overline{P}}.
\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Cette démonstration nous donne le théorème suivant :

THÉORÈME. — (α), (β), (γ) *étant trois directions orthogonales, on a*

$$\overline{\overline{A}} \times \overline{\overline{P}} = \overline{A_\alpha} \times \overline{P_\alpha} + \overline{A_\beta} \times \overline{P_\beta} + \overline{A_\gamma} \times \overline{P_\gamma}.$$

Remarquons encore que l'on a, par définition,

$$\overline{\overline{A}} \times \overline{\overline{P}} = \overline{\overline{P}} \times \overline{\overline{A}}.$$

Enfin, on a identiquement

Si
$$\begin{aligned}
\overline{\overline{A}} &= \overline{\overline{A_1}} + \overline{\overline{A_2}} + \ldots + \overline{\overline{A_k}}, \\
\overline{\overline{P}} &= \overline{\overline{P_1}} + \overline{\overline{P_2}} + \ldots + \overline{\overline{P_k}}.
\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$\begin{aligned}\overline{\overline{A}}\times\overline{\overline{P}} = {} & \overline{\overline{A_1}}\,\overline{\overline{P_1}}+\overline{\overline{A_1}}\,\overline{\overline{P_2}}+\ldots+\overline{\overline{A_1}}\times\overline{\overline{P_k}}\\ & +\overline{\overline{A_2}}\,\overline{\overline{P_1}}+\overline{\overline{A_2}}\,\overline{\overline{P_2}}+\ldots+\overline{\overline{A_2}}\times\overline{\overline{P_k}}\\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +\overline{\overline{A_k}}\,\overline{\overline{P_1}}+\overline{\overline{A_k}}\,\overline{\overline{P_2}}+\ldots+\overline{\overline{A_k}}\times\overline{\overline{P_k}}.\end{aligned}$$

30. *Définitions.*

$\overline{\overline{P}}\times\overline{\overline{P}}$ est le *produit principal* du champ quadratique $\overline{\overline{P}}$.
$\overline{\overline{P}}\times\overline{\overline{P'}}$ est le *produit complémentaire* du champ quadratique $\overline{\overline{P}}$.

Théorème. — *La somme du produit principal et du produit complémentaire d'un champ quadratique est égale au carré de la pression cubique du champ.*

On a en effet

$$\begin{aligned}\overline{\overline{P}}\times\overline{\overline{P}} &= P_{xx}P_{xx}+P_{yy}P_{yy}+P_{zz}P_{zz}+2(P_{yz}P_{yz}+P_{zx}P_{zx}+P_{xy}P_{xy}),\\ \overline{\overline{P}}\times\overline{\overline{P'}} &= P_{xx}P'_{xx}+P_{yy}P'_{yy}+P_{zz}P'_{zz}+2(P_{yz}P'_{yz}+P_{zx}P'_{zx}+P_{xy}P'_{xy}).\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}\overline{\overline{P}}\times\overline{\overline{P}}+\overline{\overline{P}}\times\overline{\overline{P'}} = {} & P_{xx}(P_{xx}+P'_{xx})+P_{yy}(P_{yy}+P'_{yy})+P_{zz}(P_{zz}+P'_{zz})\\ & +2P_{yz}(P_{yz}+P'_{yz})+2P_{zx}(P_{zx}+P'_{zx})+2P_{xy}(P_{xy}+P'_{xy}).\end{aligned}$$

La relation (5) (n° **25**) donne

$$\begin{aligned}P_{xx}+P'_{xx}=P_{yy}+P'_{yy}=P_{zz}+P'_{zz}=P,\\ P_{yz}+P'_{yz}=P_{zx}+P'_{zx}=P_{xy}+P'_{xy}=0.\end{aligned}$$

D'où

$$\overline{\overline{P}}\times\overline{\overline{P}}+\overline{\overline{P}}\times\overline{\overline{P'}}=(P_{xx}+P_{yy}+P_{zz})P=(P)^2.$$

b. Produit d'un champ de vecteurs $\overline{B}$ et d'un champ quadratique $\overline{\overline{P}}$.

31. $\overline{B}\times\overline{P_\alpha}$ est le produit du vecteur $\overline{B}$ et de la pression $\overline{P_\alpha}$ dans le champ quadratique $\overline{\overline{P}}$.

Théorème. — $\overline{B}\times\overline{P_\alpha}$ *est la projection sur la direction* (α) *d'un vec-*

Digitized by Google

teur $\overline{\overline{\mathrm{B}}\times\overline{\mathrm{P}}}$ *de l'espace que nous appellerons le vecteur du produit du champ* $\overline{\mathrm{B}}$ *et du champ* $\overline{\overline{\mathrm{P}}}$.

Nous avons en effet, par définition,

$$\overline{\mathrm{B}}\times\overline{\mathrm{P}_\alpha}=\mathrm{B}_x\mathrm{P}_{\alpha x}+\mathrm{B}_y\mathrm{P}_{\alpha y}+\mathrm{B}_z\mathrm{P}_{\alpha z}.$$

D'où, à l'aide de la formule fondamentale des champs quadratiques,

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{B}}\times\overline{\mathrm{P}_\alpha}&=\mathrm{B}_x(\mathrm{P}_{xx}\alpha_1+\mathrm{P}_{xy}\alpha_2+\mathrm{P}_{xz}\alpha_3)+\mathrm{B}_y(\mathrm{P}_{yx}\alpha_1+\mathrm{P}_{yy}\alpha_2+\mathrm{P}_{yz}\alpha_3)\\&\quad+\mathrm{B}_z(\mathrm{P}_{zx}\alpha_1+\mathrm{P}_{zy}\alpha_2+\mathrm{P}_{zz}\alpha_3)\\&=(\mathrm{B}_x\mathrm{P}_{xx}+\mathrm{B}_y\mathrm{P}_{xy}+\mathrm{B}_z\mathrm{P}_{xz})\alpha_1+(\mathrm{B}_x\mathrm{P}_{yx}+\mathrm{B}_y\mathrm{P}_{yy}+\mathrm{B}_z\mathrm{P}_{yz})\alpha_2\\&\quad+(\mathrm{B}_x\mathrm{P}_{zx}+\mathrm{B}_y\mathrm{P}_{zy}+\mathrm{B}_z\mathrm{P}_{zz})\alpha_3\\&=(\overline{\mathrm{B}}\times\overline{\mathrm{P}_x})\alpha_1+(\overline{\mathrm{B}}\times\overline{\mathrm{P}_y})\alpha_2+(\overline{\mathrm{B}}\times\overline{\mathrm{P}_z})\alpha_3.\end{aligned}$$

C'est la relation fondamentale des champs de vecteurs prouvant que $\overline{\mathrm{B}}\times\overline{\mathrm{P}_\alpha}$ est la projection sur la direction (α) d'un vecteur que nous notons $\overline{\overline{\mathrm{B}}\times\overline{\overline{\mathrm{P}}}}$.

32. Si $\overline{\overline{\mathrm{B}}}$ est le champ quadratique qui dérive du champ des vecteurs $\overline{\mathrm{B}}$, nous appellerons *vecteur principal du produit des champs* $\overline{\mathrm{B}}$ *et* $\overline{\overline{\mathrm{B}}}$ le vecteur $\overline{\overline{\mathrm{B}}\times\overline{\overline{\mathrm{B}}}}$.

33. *Divergence du vecteur* $\overline{\overline{\mathrm{B}}\times\overline{\overline{\mathrm{P}}}}$. — Nous obtenons

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(\overline{\mathrm{B}}\times\overline{\mathrm{P}_x})}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{\mathrm{B}}\times\overline{\mathrm{P}_y})}{\partial y}+\frac{\partial(\overline{\mathrm{B}}\times\overline{\mathrm{P}_z})}{\partial z}\\&=\mathrm{B}_x\left[\frac{\partial\mathrm{P}_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{P}_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\mathrm{P}_{xz}}{\partial z}\right]+\mathrm{B}_y\left[\frac{\partial\mathrm{P}_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{P}_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\mathrm{P}_{yz}}{\partial z}\right]\\&=\mathrm{B}_z\left[\frac{\partial\mathrm{P}_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{P}_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\mathrm{P}_{zz}}{\partial z}\right]+\frac{\partial\mathrm{B}_x}{\partial x}\mathrm{P}_{xx}+\frac{\partial\mathrm{B}_y}{\partial y}\mathrm{P}_{yy}+\frac{\partial\mathrm{B}_z}{\partial z}\mathrm{P}_{zz}+\left(\frac{\partial\mathrm{B}_y}{\partial z}+\frac{\partial\mathrm{B}_z}{\partial y}\right)\mathrm{P}_{yz}\\&\quad+\left(\frac{\partial\mathrm{B}_z}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{B}_x}{\partial z}\right)\mathrm{P}_{zx}+\left(\frac{\partial\mathrm{B}_x}{\partial y}+\frac{\partial\mathrm{B}_y}{\partial x}\right)\mathrm{P}_{xy}\\&=\mathrm{B}_x\mathrm{I}_x+\mathrm{B}_y\mathrm{I}_y+\mathrm{B}_z\mathrm{I}_z+\mathrm{B}_{xx}\mathrm{P}_{xx}+\mathrm{B}_{yy}\mathrm{P}_{yy}+\mathrm{B}_{zz}\mathrm{P}_{zz}\\&\quad+2(\mathrm{B}_{yz}\mathrm{P}_{yz}+\mathrm{B}_{zx}\mathrm{P}_{zx}+\mathrm{B}_{xy}\mathrm{P}_{xy})\\&=(\overline{\mathrm{B}}\times\overline{\mathrm{I}})+(\overline{\overline{\mathrm{B}}}\times\overline{\overline{\mathrm{P}}}).\end{aligned}$$

La divergence du vecteur du produit $\overline{\overline{\mathrm{B}}\times\overline{\overline{\mathrm{P}}}}$ *est donc égale au pro-*

Digitized by Google

duit $\overline{B} \times \overline{I}$ *du vecteur* $\overline{B}$ *et du vecteur-force* $\overline{I}$ *du champ* $\overline{\overline{P}}$, *augmenté du produit* $\overline{\overline{B}} \times \overline{\overline{P}}$ *du champ* $\overline{\overline{P}}$ *et du champ quadratique* $\overline{\overline{B}}$ *dérivant des vecteurs* $\overline{B}$.

c. Produit des pressions de deux champs quadratiques $\overline{\overline{A}}$ et $\overline{\overline{P}}$.

34. Étant donnés les deux champs $\overline{\overline{A}}$ et $\overline{\overline{P}}$, développons la valeur générale du produit $\overline{A_\alpha}\overline{P_\beta}$ de deux pressions quelconques $\overline{A_\alpha}$ et $\overline{P_\beta}$.

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\overline{A_\alpha} \times \overline{P_\beta} &= A_{\alpha x} P_{\beta x} + A_{\alpha y} P_{\beta y} + A_{\alpha z} P_{\beta z} \\
&= (A_{xx}\alpha_1 + A_{xy}\alpha_2 + A_{xz}\alpha_3)(P_{xx}\beta_1 + P_{xy}\beta_2 + P_{xz}\beta_3) \\
&\quad + (A_{yx}\alpha_1 + A_{yy}\alpha_2 + A_{yz}\alpha_3)(P_{yx}\beta_1 + P_{yy}\beta_2 + P_{yz}\beta_3) \\
&\quad + (A_{zx}\alpha_1 + A_{zy}\alpha_2 + A_{zz}\alpha_3)(P_{zx}\beta_1 + P_{zy}\beta_2 + P_{zz}\beta_3) \\
&= (A_{xx}P_{xx} + A_{xy}P_{xy} + A_{xz}P_{xz})\alpha_1\beta_1 + (A_{yx}P_{yx} + A_{yy}P_{yy} + A_{yz}P_{yz})\alpha_2\beta_2 \\
&\quad + (A_{zx}P_{zx} + A_{zy}P_{zy} + A_{zz}P_{zz})\alpha_3\beta_3 \\
&\quad + (A_{yx}P_{zx} + A_{yy}P_{zy} + A_{yz}P_{zz})\alpha_2\beta_3 + (A_{zx}P_{yx} + A_{zy}P_{yy} + A_{zz}P_{yz})\alpha_3\beta_2 \\
&\quad + (A_{zx}P_{xx} + A_{zy}P_{xy} + A_{zz}P_{xz})\alpha_3\beta_1 + (A_{xx}P_{zx} + A_{xy}P_{zy} + A_{xz}P_{zz})\alpha_1\beta_3 \\
&\quad + (A_{xx}P_{yx} + A_{xy}P_{yy} + A_{xz}P_{yz})\alpha_1\beta_2 + (A_{yx}P_{xx} + A_{yy}P_{xy} + A_{yz}P_{xz})\alpha_2\beta_1,
\end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
\overline{A_\alpha}\overline{P_\beta} &= (\overline{A_x}\overline{P_x})\alpha_1\beta_1 + (\overline{A_y}\overline{P_y})\alpha_2\beta_2 + (\overline{A_z}\overline{P_z})\alpha_3\beta_3 \\
&\quad + (\overline{A_y}\overline{P_z})\alpha_2\beta_3 + (\overline{A_z}\overline{P_y})\alpha_3\beta_2 + (\overline{A_z}\overline{P_x})\alpha_3\beta_1 + (\overline{A_x}\overline{P_z})\alpha_1\beta_3 \\
&\quad + (\overline{A_x}\overline{P_y})\alpha_1\beta_2 + (\overline{A_y}\overline{P_x})\alpha_2\beta_1,
\end{aligned}\right.$$

$\overline{A_\alpha}\overline{P_\alpha}$ se présente donc suivant la fonction générale homogène du second degré en (α) et (β) d'un champ bilinéaire.

35. *Définition.* — Si le champ $\overline{\overline{A}}$ se confond avec le champ $\overline{\overline{P}}$, nous appellerons *produits principaux des pressions du champ* $\overline{\overline{P}}$ les produits tels que $\overline{P_\alpha}\overline{P_\beta}$; puisqu'on peut y permuter α et β, $\overline{P_\alpha} \times \overline{P_\beta}$ est la fonction générale d'un *champ quadratique des produits principaux des pressions du champ* $\overline{\overline{P}}$; nous noterons $\overline{\overline{P}} \times \overline{\overline{P}}$ ce nouveau champ quadratique.

Digitized by Google

On a

$$\overline{P_\alpha}\overline{P_\beta} = \overline{P_x}\overline{P_x}\alpha_1\beta_1 + \overline{P_y}\overline{P_y}\alpha_2\beta_2 + \overline{P_z}\overline{P_z}\alpha_3\beta_3 + \overline{P_y}\overline{P_z}(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) + \overline{P_z}\overline{P_x}(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) + \overline{P_x}\overline{P_y}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1).$$

36. Théorème. — *La quadrique directrice du champ* $\overline{\overline{P \times P}}$ *admet les mêmes directions principales que la quadrique du champ* $\overline{\overline{P}}$.

Cette dernière étant rapportée à ses axes, on a

$$P_{yz} = P_{zx} = P_{xy} = 0,$$

Mais alors on peut vérifier que $\overline{P_y}\overline{P_z} = \overline{P_z}\overline{P_x} = \overline{P_x}\overline{P_y} = 0$. On a en effet

$$\overline{P_y}\overline{P_z} = P_{yx}P_{zx} + P_{yy}P_{zy} + P_{yz}P_{zz} = 0.$$

La quadrique directrice du champ $\overline{\overline{P \times P}}$ est donc aussi rapportée à ses axes.

37. Théorème. — *La quadrique directrice du champ* $\overline{\overline{P \times P}}$ *est toujours un ellipsoïde.*

Cette quadrique étant rapportée à ses axes, son équation est (n° **23**)

$$(\overline{P_x}\overline{P_x}) \times X^2 + (\overline{P_y}\overline{P_y}) \times Y^2 + (\overline{P_z}\overline{P_z}) \times Z^2 = \pm H^2. \tag{8}$$

Les produits $\overline{P_x}\overline{P_x}$, $\overline{P_y}\overline{P_y}$ et $\overline{P_z}\overline{P_z}$ se réduisent aux trois carrés $(P_{xx})^2$, $(P_{yy})^2$, $(P_{zz})^2$, il sont donc tous les trois positifs, et (8) considérée avec le signe + est bien l'équation d'un ellipsoïde.

38. La quadrique directrice du champ $\overline{\overline{P \times P}}$ pourrait être utilisée pour représenter les valeurs absolues des pressions $\overline{P_\alpha}$. Dans cette quadrique, le vecteur de direction (α) détermine en effet $\overline{P_\alpha}\overline{P_\alpha}$, c'est-à-dire $(P_{\alpha x})^2 + (P_{\alpha y})^2 + (P_{\alpha z})^2$, carré de la grandeur absolue du vecteur $\overline{P_\alpha}$.

39. *Définition.* — Nous appellerons *produits complémentaires des pressions du champ* $\overline{\overline{P}}$ les produits tels que $\overline{P_\alpha}\overline{P'_\beta}$ d'une pression $\overline{P_\alpha}$ du champ $\overline{\overline{P}}$ et d'une pression $\overline{P'_\alpha}$ du champ complémentaire $\overline{\overline{P'}}$.

Digitized by Google

THÉORÈME. — *On peut permuter les indices* α *et* β *dans* $\overline{P_\alpha P'_\beta}$, *c'est-à-dire que l'on a*

$$\overline{P_\alpha P'_\beta} = \overline{P_\beta P'_\alpha}.$$

$\overline{P_\alpha P'_\beta}$ est donc la fonction générale d'un *champ quadratique des produits complémentaires des pressions du champ* $\overline{P}$; nous noterons $\overline{\overline{P \times P'}}$ ce nouveau champ quadratique.

On a en effet, d'après les données du n° **25**,

$$\begin{aligned}\overline{P_y P'_z} &= P_{yx} P'_{zx} + P_{yy} P'_{zy} + P_{yz} P'_{zz} \\ &= -P_{yx} P_{zx} - P_{yy} P_{zy} + P_{yz}(P_{xx} + P_{yy}) \\ &= -(P_{yx} P_{zx} + P_{yy} P_{zy} + P_{yz} P_{zz}) + P_{yz}(P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}).\end{aligned}$$

D'où l'on conclut

$$\overline{P_y P'_z} + \overline{P_y P_z} = P_{yz} \times P. \tag{9}$$

On obtiendrait de même

$$\overline{P_z P'_y} + \overline{P_z P_y} = P_{zy} \times P,$$

ce qui prouve que

$$\overline{P_y P'_z} = \overline{P_z P'_y}.$$

On démontrerait de même

$$\overline{P_z P'_x} = \overline{P_x P'_z},$$
$$\overline{P_x P'_y} = \overline{P_y P'_x}.$$

Par suite, la relation (7) qui convient ici devient

$$\left\{\begin{aligned}\overline{P_\alpha P'_\beta} = {} & \overline{P_x P'_x}\alpha_1\beta_1 + \overline{P_y P'_y}\alpha_2\beta_2 + \overline{P_z P'_z}\alpha_3\beta_3 \\ & + \overline{P_y P'_z}(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) + \overline{P_z P'_x}(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) + \overline{P_x P'_y}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1),\end{aligned}\right. \tag{10}$$

elle montre donc que

$$\overline{P_\alpha P'_\beta} = \overline{P_\beta P_\alpha}.$$

C. Q. F. D.

40. On a d'ailleurs aussi

$$\begin{aligned}\overline{P_x P'_x} &= P_{xx} P'_{xx} + P_{xy} P'_{xy} + P_{xz} P'_{xz} \\ &= P_{xx} \times P - (P_{xx} P_{xx} + P_{xy} P_{xy} + P_{xz} P_{xz}).\end{aligned}$$

Digitized by Google

D'où

$$\overline{P_x}\overline{P'_x}+\overline{P'_x}\overline{P_x}=P_{xx}P. \tag{11}$$

Mêmes relations pour $\overline{P_y}$ et $\overline{P_z}$.

Avec (9) et (11) on obtient ainsi, dans (10),

$$\begin{aligned}\overline{P_\alpha}\overline{P'_\beta}=-\big[&\overline{P_x}\overline{P'_x}\alpha_1\beta_1+\ldots+\overline{P_x}\overline{P'_y}(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1\\&+P[P_{xx}\alpha_1\beta_1+\ldots+P_{xy}(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)],\end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$\overline{P_\alpha}\overline{P_\beta}+\overline{P_\alpha}\overline{P'_\beta}=\overline{P_\beta}\overline{P_\alpha}+\overline{P_\beta}\overline{P'_\alpha}=P\times P_{\alpha\beta}.$$

Cette formule très élégante relie les fonctions correspondantes des champs $\overline{\overline{P\times P}}$ et $\overline{\overline{P\times P'}}$; elle se rapproche extrêmement de la formule qui relie les fonctions correspondantes des champs $\overline{\overline{P}}$ et $\overline{\overline{P'}}$ (n° **25**)

$$P_{\alpha\beta}+P'_{\alpha\beta}=P\times(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3).$$

Digitized by Google

CHAPITRE III.

ÉTUDE DES CHAMPS CONTINUS BILINÉAIRES SYMÉTRIQUES GAUCHES OU TOURBILLONNAIRES.

I. — Vecteur-tourbillon.

41. Le champ tourbillonnaire $\overline{\overline{T}}$ est déterminé par la formule fondamentale

$$(1) \qquad T_{\alpha\beta} = T_{yz}(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + T_{zx}(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + T_{xy}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1).$$

Le champ tourbillonnaire possède des propriétés en grand nombre semblables à celles des champs quadratiques, propriétés que nous allons passer rapidement en revue.

THÉORÈME. — *Les directions* (α) *et* (β) *étant perpendiculaires entre elles,* $T_{\alpha\beta}$ *est la projection, sur une direction* (γ) *perpendiculaire au plan* $(\alpha)(\beta)$, *d'un vecteur de l'espace appelé* vecteur-tourbillon *du champ.*

On peut reproduire ici la démonstration du n° **15**; la direction (γ) étant déterminée par la relation

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = +1.$$

On a

$$(3) \qquad T_{\alpha\beta} = T_{yz}\gamma_1 + T_{zx}\gamma_2 + T_{xy}\gamma_3.$$

II. — Vecteurs-pression.

42. THÉORÈME I. — *Pour toutes les directions* (β), *les fonctions* $T_{\alpha\beta}$ *peuvent être regardées comme les projections sur les directions* (β) *d'un même vecteur* $\overline{T_\alpha}$ *de l'espace.*

On tire, en effet, de la formule fondamentale (1),

$$T_{\alpha\beta} = (T_{yx}\alpha_2 + T_{zx}\alpha_3)\beta_1 + (T_{zy}\alpha_3 + T_{xy}\alpha_1)\beta_2 + (T_{xz}\alpha_1 + T_{yz}\alpha_2)\beta_3$$

Digitized by Google

et l'on a

$$(4)\qquad \begin{cases} T_{yx}\alpha_2 + T_{zx}\alpha_3 = T_{\alpha x}, \\ T_{zy}\alpha_3 + T_{xy}\alpha_1 = T_{\alpha y}, \\ T_{xz}\alpha_1 + T_{yz}\alpha_2 = T_{\alpha z}. \end{cases}$$

Par suite

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha x}\beta_1 + T_{\alpha y}\beta_2 + T_{\alpha z}\beta_3,$$

formule fondamentale qui prouve que $T_{\alpha\beta}$ est bien la projection sur la direction (β) d'un vecteur $\overline{T_\alpha}$ de l'espace.

$\overline{T_\alpha}$ est la *pression* dans le champ tourbillonnaire $\overline{\overline{T}}$ suivant la direction (α); elle se décompose comme dans le champ quadratique en pression normale et pression tangentielle.

THÉORÈME II. — *La composante normale de la pression* $\overline{T_\alpha}$ *est nulle.*

Dans la formule fondamentale on a en effet identiquement

$$T_{\alpha\alpha} = 0.$$

THÉORÈME III. — *La pression* $\overline{T_\alpha}$ *se réduisant à sa composante tangentielle, celle-ci est perpendiculaire au vecteur-tourbillon* $\overline{T}$.

Il nous faut prouver pour cela que

$$\overline{T_\alpha}\,\overline{T} = T_{\alpha x}T_{yz} + T_{\alpha y}T_{zx} + T_{\alpha z}T_{xy} = 0.$$

D'après (4) :

$$\begin{aligned}\overline{T_\alpha}\,\overline{T} &= (T_{yx}\alpha_2 + T_{zx}\alpha_3)T_{yz} + (T_{zy}\alpha_3 + T_{xy}\alpha_1)T_{zx} + (T_{xz}\alpha_1 + T_{yz}\alpha_2)T_{xy} \\ &= (T_{xy}T_{zx} + T_{xy}T_{xz})\alpha_1 + (T_{yz}T_{xy} + T_{yz}T_{yx})\alpha_2 + (T_{zx}T_{yz} + T_{zx}T_{zy})\alpha_3.\end{aligned}$$

Comme l'on a

$$T_{yz} = -T_{zy}, \qquad T_{zx} = -T_{xz} \qquad T_{xy} = -T_{yx},$$

cette expression est identiquement nulle.

43. *Construction de la pression* $\overline{T_\alpha}$. — La connaissance du vecteur-tourbillon détermine complètement la pression $\overline{T_\alpha}$.

Voici comment on peut construire $\overline{T_\alpha}$ à l'aide de $\overline{T}$: Menons une direction (β) perpendiculaire au plan $\overline{T}$ et (α); (γ) étant alors une direction

Digitized by Google

perpendiculaire à (α) et (β) satisfaisant à la relation (2) (n° **41**), la composante $T_{\alpha\beta}$ de $\overline{T_\alpha}$ sera égale en grandeur et en signe à la projection de $\overline{T}$ sur la direction (γ), d'après (3) (n° **41**).

Mais d'après le théorème III (β) est la direction même de $\overline{T_\alpha}$; la composante $T_{\alpha\beta}$ est donc le vecteur $\overline{T_\alpha}$ lui-même.

III. — Vecteur-force.

44. Théorème. — *La divergence* I_α *du vecteur* $\overline{P_\alpha}$ *est la projection sur la direction* (α) *d'un vecteur* $\overline{I}$ *appelé vecteur-force du champ* $\overline{\overline{T}}$.

On a en effet

$$I_\alpha = \frac{\partial T_{\alpha x}}{\partial x} + \frac{\partial T_{\alpha y}}{\partial y} + \frac{\partial T_{\alpha z}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial T_{\alpha x}}{\partial x} = \frac{\partial (T_{yx}\alpha_2 + T_{zx}\alpha_3)}{\partial x} = \frac{\partial T_{yx}}{\partial x}\alpha_2 + \frac{\partial T_{zx}}{\partial x}\alpha_3,$$

$$\frac{\partial T_{\alpha y}}{\partial y} = \frac{\partial T_{zy}}{\partial y}\alpha_3 + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y}\alpha_1,$$

$$\frac{\partial T_{\alpha z}}{\partial z} = \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}\alpha_1 + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z}\alpha_2.$$

Par suite

$$I_\alpha = \left(\frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}\right)\alpha_1 + \left(\frac{\partial T_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial x}\right)\alpha_2 + \left(\frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y}\right)\alpha_3,$$

ou bien encore, puisque $T_{xx} = T_{yy} = T_{zz} = 0$,

$$I_\alpha = I_x\alpha_1 + I_y\alpha_2 + I_z\alpha_3,$$

ce qui démontre le théorème.

IV. — Champ tourbillonnaire résultant.

45. En faisant la somme des formules fondamentales de divers champs tourbillonnaires composants, on obtient la formule fondamentale d'un champ tourbillonnaire résultant, dans lequel la pression et le vecteur-force sont les résultantes géométriques des pressions correspondantes et des vecteurs-force dans les champs composants.

Digitized by Google

V. — Produits de champs tourbillonnaires.

46. Examinons le *produit des pressions* dans deux champs tourbillonnaires $\overline{\overline{A}}$ et $\overline{\overline{T}}$.

Nous trouvons

$$\begin{aligned}
\overline{A_\alpha}\overline{T_\beta} &= A_{\alpha x}T_{\alpha x} + A_{\alpha y}T_{\alpha y} + A_{\alpha z}T_{\alpha z} \\
&= (A_{yx}\alpha_2 + A_{zx}\alpha_3)(T_{yx}\beta_2 + T_{zx}\beta_3) \\
&\quad + (A_{zy}\alpha_3 + A_{xy}\alpha_1)(T_{zy}\beta_3 + T_{xy}\beta_1) \\
&\quad + (A_{xz}\alpha_1 + A_{yz}\alpha_2)(T_{xz}\beta_1 + T_{yz}\beta_2) \\
\overline{A_\alpha}\overline{T_\beta} &= (A_{xy}T_{xy} + A_{xz}T_{xz})\alpha_1\beta_1 + (A_{yz}T_{yz} + A_{yx}T_{yx})\alpha_2\beta_2 \\
&\quad + (A_{zx}T_{zx} + A_{zy}T_{zy})\alpha_3\beta_3 + A_{yx}T_{zx}\alpha_2\beta_3 + A_{zx}T_{yx}\alpha_3\beta_2 \\
&\quad + A_{zy}T_{xy}\alpha_3\beta_1 + A_{xy}T_{zy}\alpha_1\beta_3 + A_{xz}T_{yz}\alpha_1\beta_2 + A_{yz}T_{xz}\alpha_2\beta_1,
\end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire, puisque $A_{xx} = A_{yy} = \ldots = T_{zz} = 0$,

$$\overline{A_\alpha}\overline{T_\beta} = \overline{A_x}\overline{T_x}\alpha_1\beta_1 + \ldots + \overline{A_x}\overline{T_y}\alpha_1\beta_2 + \overline{A_y}\overline{T_x}\alpha_2\beta_1.$$

$\overline{A_\alpha}\overline{T_\beta}$ est encore la fonction générale d'un champ bilinéaire.

47. Le *produit principal des pressions* $\overline{T_\alpha}\overline{T_\beta}$ est donné par la formule

$$\overline{T_\alpha}\overline{T_\beta} = \overline{T_x}\overline{T_x}\alpha_1\beta_1 + \ldots + \overline{T_x}\overline{T_y}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1).$$

C'est la formule fondamentale d'un *champ quadratique*.

Rapportons celui-ci à un système d'axes $oxyz$ tel que ox soit confondu en direction avec le vecteur-tourbillon $\overline{T}$.

On a alors

$$T_{zx} = T_{xy} = 0$$

et la formule fondamentale du champ devient

$$\overline{A_\alpha}\overline{T_\beta} = (T_{yz})^2\alpha_2\beta_2 + (T_{yz})^2\alpha_3\beta_3.$$

La quadrique directrice du champ est donc le cylindre

$$Y^2 + Z^2 = \frac{H^2}{(T_{yz})^2}$$

dont la section droite est un cercle tracé dans un plan perpendiculaire au vecteur-tourbillon.

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

PERFECTIONS DES CHAMPS BILINÉAIRES.

I. — Perfections des champs de vecteurs.

48. Lorsqu'un champ de vecteurs $\overline{V}$ dérive d'un potentiel Φ, on pourrait dire qu'il y a une certaine *perfection* du champ de vecteurs $\overline{V}$.

On pourrait justifier cette expression en remarquant que le potentiel Φ a constitué le point de départ de la conception du champ de vecteurs quelconques $\overline{V}$, dans notre mode de généralisation du n° **4**.

Dans le cas du potentiel, le champ de vecteurs $\overline{V}$ dépend de la connaissance d'une seule fonction Φ.

Dans un cas moins particularisé, le champ de vecteurs dépend de deux fonctions φ et ψ.

$$V_x = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad V_y = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad V_z = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Nous appellerons :

Champ de vecteurs $\overline{V_1}$, cas du potentiel Φ;

Champ de vecteurs $\overline{V_2}$, cas des fonctions φ et ψ;

Champ de vecteurs $\overline{V_3}$, cas général.

II. — Perfections des champs bilinéaires.

49. Les considérations précédentes peuvent s'étendre aux champs bilinéaires quadratiques.

On peut distinguer successivement les six cas suivants dans lesquels les champs quadratiques dépendent de 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 fonctions indépendantes.

1° Champ quadratique $\overline{\overline{P_1}}$, dérivant au deuxième ordre d'un potentiel Φ,

Digitized by Google

ou au premier ordre d'un champ de vecteurs $\overline{V} = \overline{P_1}$,

$$P_{xx} = \frac{\partial V_x}{\partial x}, \quad P_{yy} = \frac{\partial V_y}{\partial y}, \quad P_{zz} = \frac{\partial V_z}{\partial z},$$

$$P_{yz} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right], \quad P_{zx} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right], \quad P_{xy} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right],$$

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z};$$

2° Champ quadratique $\overline{\overline{P_2}}$ dérivant d'un champ de vecteurs $\overline{P_2}$;

3° Champ quadratique $\overline{\overline{P_3}}$ dérivant d'un champ de vecteurs $\overline{P_3}$;

4° Champ quadratique $\overline{\overline{P_4}}$:

$$P_{xx} = \varphi \frac{\partial V_x}{\partial x}, \quad P_{yy} = \varphi \frac{\partial V_y}{\partial y}, \quad P_{zz} = \varphi \frac{\partial V_z}{\partial z},$$

$$P_{yz} = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right), \quad P_{zx} = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right), \quad P_{xy} = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right);$$

5° Champ quadratique $\overline{\overline{P_5}}$:

$$P_{xx} = \varphi \frac{\partial V_x}{\partial x}, \quad P_{yy} = \varphi \frac{\partial V_y}{\partial y}, \quad P_{zz} = \varphi \frac{\partial V_z}{\partial z},$$

$$P_{yz} = \frac{1}{2}\psi\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right), \quad P_{zx} = \frac{1}{2}\psi\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right), \quad P_{xy} = \frac{1}{2}\psi\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right);$$

6° Champ général $\overline{\overline{P_6}}$.

III. — Quelques données au sujet de champs bilinéaires perfectionnés.

50. *Champ* $\overline{\overline{P_1}}$. — Il dérive d'un champ de vecteurs $\overline{P_1}$,

$$P_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad P_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad P_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

$$T_{yz} = T_{zx} = T_{xy} = 0.$$

Digitized by Google

Le tourbillon du champ $\overline{P}$, *est nul.*

$$P_{xx}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\qquad P_{yy}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\qquad P_{zz}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2},$$
$$P_{yz}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z},\qquad P_{zx}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial x},\qquad P_{xy}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}.$$

Pression cubique P,

$$P=P_{xx}+P_{yy}+P_{zz}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\Delta\Phi$$

($\Delta\Phi$ est la notation connue du paramètre différentiel du deuxième ordre).

Champ complémentaire $\overline{\overline{P'}}$,

$$P'_{xx}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2},\qquad P'_{yz}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z},$$
$$P'_{yy}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\qquad P'_{zx}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y},$$
$$P'_{zz}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\qquad P'_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial x}.$$

Vecteur-force $\overline{I}$,

$$I_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y^2}+\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\,\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial\,\Delta\Phi}{\partial x},$$

$$I_x=\frac{\partial\,\Delta\Phi}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial x},$$
$$I_y=\frac{\partial\,\Delta\Phi}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y},$$
$$I_z=\frac{\partial\,\Delta\Phi}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Le champ des vecteurs $\overline{I}$ dérive du potentiel $\Delta\Phi$ ou P.

Le vecteur-force $\overline{I'}$ *du champ* $\overline{\overline{P'}}$ *est identiquement nul.*

La divergence du vecteur $\overline{I}$ est

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=\Delta P=\Delta\Delta\Phi.$$

Quelques produits concernant le champ $\overline{\overline{P}}$:

Digitized by Google

Produit des champs $\overline{\overline{A}}$ et $\overline{\overline{P}}$:

$$\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{P}} = A_{xx}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + A_{yy}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + A_{zz}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + 2\left(A_{yz}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z} + A_{zx}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial x} + A_{xy}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\right).$$

Produit principal $\overline{\overline{P}}\,\overline{\overline{P}}$ du champ $\overline{\overline{P}}$:

$$\overline{\overline{P}}\,\overline{\overline{P}} = \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)^2 + 2\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right].$$

Produit du champ $\overline{B}$ et du champ $\overline{\overline{P}}$; vecteur $\overline{\overline{B}\,\overline{P}}$:

$$\overline{B}\,\overline{P_x} = B_x\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + B_y\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} + B_z\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z},$$
$$\overline{B}\,\overline{P_y} = B_x\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial x} + B_y\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + B_z\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z},$$
$$\overline{B}\,\overline{P_z} = B_x\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial x} + B_y\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial y} + B_z\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$

Produit principal $\overline{\overline{P}}\,\overline{\overline{P}}$ du champ $\overline{\overline{P}}$; c'est le produit du champ $\overline{P}$ et du champ $\overline{\overline{P}}$ dérivant de la fonction Φ.

On a

$$\overline{P}\,\overline{P_x} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right],$$
$$\overline{P}\,\overline{P_y} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right],$$
$$\overline{P}\,\overline{P_z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right],$$

$\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]$ est le carré de la grandeur du vecteur $\overline{P}$. On peut noter cette expression $\overline{P}\,\overline{P}$.

On voit donc que le vecteur des puissances $\overline{\overline{P}}\,\overline{\overline{P}}$ dérive du potentiel $\frac{1}{2}(\overline{P}\,\overline{P})$.

51. *Champ* $\overline{\overline{P_s}}$. — Le champ $\overline{\overline{P_s}}$ dérive d'un champ de vecteurs $\overline{P_s}$.

Digitized by Google

Le tourbillon $\overline{T}$ du vecteur $\overline{P_3}$ est donné par les formules

$$T_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_y}{\partial z}-\frac{\partial P_z}{\partial y}\right),$$
$$T_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_z}{\partial x}-\frac{\partial P_x}{\partial z}\right),$$
$$T_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_x}{\partial y}-\frac{\partial P_y}{\partial x}\right).$$

Appelons *moment principal* du champ $\overline{P_3}$ le moment du vecteur tourbillon $\overline{T}$ dans la position définie pour le vecteur $\overline{P_3}$ (voir n° 8), nous aurons

$$M_x=T_{xz}P_y+T_{xz}P_z,$$
$$M_y=T_{yx}P_z+T_{yz}P_x,$$
$$M_z=T_{zy}P_x+T_{zx}P_y.$$

Pression cubique P,

$$P=\frac{\partial P_x}{\partial x}+\frac{\partial P_y}{\partial y}+\frac{\partial P_z}{\partial z}.$$

La pression cubique P du champ $\overline{\overline{P_3}}$ est aussi la divergence du champ $\overline{P_3}$.

Vecteur-force $\overline{I}$,

$$I_x=\frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P_y}{\partial x\,\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 P_z}{\partial x\,\partial z}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P_x}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P_x}{\partial x}+\frac{\partial P_y}{\partial y}+\frac{\partial P_z}{\partial z}\right)=\frac{1}{2}\left(\Delta P_x+\frac{\partial P}{\partial x}\right)$$

$$I_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\Delta P_x\right),$$
$$I_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\Delta P_y\right),$$
$$I_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial z}+\Delta P_z\right).$$

La divergence du vecteur $\overline{I}$ est

$$\frac{1}{2}\left(\Delta\frac{\partial P_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\Delta\frac{\partial P_y}{\partial y}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\Delta\frac{\partial_z P}{\partial z}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)=\Delta P.$$

Digitized by Google

Composantes du vecteur-force $\overline{I'}$ du champ complémentaire $\overline{\overline{P'_2}}$,

$$I'_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \Delta P_x\right),$$
$$I'_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \Delta P_y\right),$$
$$I'_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \Delta P_z\right).$$

La divergence du vecteur $\overline{\overline{I'}}$ est identiquement nulle.

Produits du champ $\overline{\overline{P_2}}$:

Produit principal $\overline{\overline{P}}\,\overline{\overline{P}}$,

$$\overline{\overline{P}}\,\overline{\overline{P}} = \left(\frac{\partial P_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_z}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P_y}{\partial z} + \frac{\partial P_z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_z}{\partial x} + \frac{\partial P_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_x}{\partial y} + \frac{\partial P_y}{\partial x}\right)^2\right].$$

Vecteur du produit principal $\overline{\overline{P}}\,\overline{\overline{P}}$,

$$\begin{aligned}
\overline{P}\,\overline{P_x} &= P_{xx}P_x + P_{xy}P_y + P_{xz}P_z \\
&= \frac{\partial P_x}{\partial x}P_x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_x}{\partial y} + \frac{\partial P_y}{\partial x}\right)P_y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_x}{\partial z} + \frac{\partial P_z}{\partial x}\right)P_z \\
&= \frac{\partial P_x}{\partial x}P_x + \frac{\partial P_y}{\partial x}P_y + \frac{\partial P_z}{\partial x}P_z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_x}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial x}\right)P_y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x}\right)P \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + T_{xy}P_y + T_{xz}P_z \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\overline{P}\,\overline{P}) + M_x.
\end{aligned}$$

On trouve donc

$$\overline{P}\,\overline{P_x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\overline{P}\,\overline{P}) + M_x,$$
$$\overline{P}\,\overline{P_y} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(\overline{P}\,\overline{P}) + M_y,$$
$$\overline{P}\,\overline{P_z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}(\overline{P}\,\overline{P}) + M_z.$$

52. *Champ* $\overline{\overline{P_2}}$. — Le champ $\overline{\overline{P_2}}$ dérive d'un champ $\overline{P_2}$.

Digitized by Google

Tourbillon $\overline{T}$:

$$T_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_y}{\partial z}-\frac{\partial P_z}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\times\frac{\partial \Phi}{\partial y}-\frac{\partial \Psi}{\partial y}\times\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right),$$
$$T_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_z}{\partial x}-\frac{\partial P_x}{\partial z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\times\frac{\partial \Phi}{\partial z}-\frac{\partial \Psi}{\partial z}\times\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right),$$
$$T_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_x}{\partial y}-\frac{\partial P_y}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\times\frac{\partial \Phi}{\partial x}-\frac{\partial \Psi}{\partial x}\times\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right).$$

Le tourbillon $\overline{T}$ est perpendiculaire au vecteur $\overline{P}$.

On a en effet identiquement

$$\overline{P}\,\overline{T}=P_xT_{yz}+P_yT_{zx}+P_zT_{xy}=0.$$

On peut démontrer que la vérification de cette dernière condition est suffisante pour que le champ $\overline{P}$ soit un champ $\overline{P_2}$.

Moment principal du champ $\overline{P_2}$.

$$M_x=T_{xz}P_y+T_{xy}P_z=\frac{1}{2}\Psi\frac{\partial \Phi}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\Psi\frac{\partial \Psi}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right].$$

Appelons $\overline{P'}$ le champ de vecteurs dérivant de la fonction Φ.

Appelons $\overline{P''}$ le champ de vecteurs dérivant de la fonction Ψ. On aura

$$M_x=\frac{1}{2}\Psi\left[P'_x(\overline{P'}\,\overline{P''})-P''_x(\overline{P'}\,\overline{P'})\right],$$
$$M_y=\frac{1}{2}\Psi\left[P'_y(\overline{P'}\,\overline{P''})-P''_y(\overline{P'}\,\overline{P'})\right],$$
$$M_z=\frac{1}{2}\Psi\left[P'_z(\overline{P'}\,\overline{P''})-P''_z(\overline{P'}\,\overline{P'})\right].$$

Eléments du champ quadratique :

$$P_{xx}=\frac{\partial P_x}{\partial x}=\frac{\partial \Psi}{\partial x}\times\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\Psi\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},$$
$$P_{yy}=\frac{\partial P_y}{\partial y}=\frac{\partial \Psi}{\partial y}\times\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\Psi\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},$$
$$P_{zz}=\frac{\partial P_z}{\partial z}=\frac{\partial \Psi}{\partial z}\times\frac{\partial \Phi}{\partial z}+\Psi\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$

$$P_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_y}{\partial z}+\frac{\partial P_z}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)+\Psi\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z},$$
$$P_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_z}{\partial x}+\frac{\partial P_x}{\partial z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial z}+\frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)+\Psi\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial x},$$
$$P_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_x}{\partial y}+\frac{\partial P_y}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)+\Psi\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}.$$

Digitized by Google

Pression cubique ou divergence P :

$$P = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + \Psi\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)$$
$$= \overline{P'P''} + \Psi \Delta\Phi.$$

Vecteur-force $\overline{I}$:

$$I_x = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right)\right.$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$$
$$\left. + 2\Psi \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right) + 2\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial z}\right)\right].$$

En groupant les termes on trouvera

$$I_x = \frac{1}{2}\left[\Delta\left(\Psi \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{P'P''} + \Psi \Delta\Phi\right)\right],$$
$$I_y = \frac{1}{2}\left[\Delta\left(\Psi \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{P'P''} + \Psi \Delta\Phi\right)\right],$$
$$I_z = \frac{1}{2}\left[\Delta\left(\Psi \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{P'P''} + \Psi \Delta\Phi\right)\right].$$

La divergence du vecteur I vaut ΔP ou bien

$$\left[\Delta\left(\overline{P'P''}\right) + \Delta\left(\Psi \Delta\Phi\right)\right].$$

Produits concernant le champ $\overline{\overline{P_2}}$:

Le produit principal $\overline{\overline{P}}\,\overline{\overline{P}}$ et le vecteur principal $\overline{\overline{P}}\times\overline{\overline{P}}$ peuvent être obtenus à l'aide des formules des champs $\overline{\overline{P_3}}$.

53. *Champ* $\overline{\overline{P_4}}$.

$$P_{xx} = \Psi \frac{\partial V_x}{\partial x}, \qquad P_{yy} = \Psi \frac{\partial V_y}{\partial y}, \qquad P_{zz} = \Psi \frac{\partial V_z}{\partial z},$$

$$P_{yz} = \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right), \quad P_{zx} = \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right), \quad P_{xy} = \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right).$$

Pression cubique P :

$$P = \Psi\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) = \Psi\left(V_{xx} + V_{yy} + V_{zz}\right) = \Psi \times V.$$

Digitized by Google

Vecteur-force I :

$$I_x = \frac{1}{2}\Psi\left(\Delta V_x + \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial \Psi}{\partial x} V_{xx} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} V_{xy} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} V_{xz},$$
$$I_y = \frac{1}{2}\Psi\left(\Delta V_y + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial \Psi}{\partial x} V_{yx} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} V_{yy} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} V_{yz},$$
$$I_z = \frac{1}{2}\Psi\left(\Delta V_z + \frac{\partial V}{\partial z}\right) + \frac{\partial \Psi}{\partial x} V_{zx} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} V_{zy} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} V_{zz}.$$

Si $\overline{V'}$ est le champ de vecteurs dérivant du potentiel Ψ

$$I_x = \frac{1}{2}\Psi\left(\Delta V_x + \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \overline{V'}\overline{V'_x},$$
$$I_y = \frac{1}{2}\Psi\left(\Delta V_y + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \overline{V'}\overline{V'_y},$$
$$I_z = \frac{1}{2}\Psi\left(\Delta V_z + \frac{\partial V}{\partial z}\right) + \overline{V'}\overline{V'_z}.$$

54. *Champ* $\overline{\overline{P_s}}$.

$$P_{xx} = \Phi\frac{\partial V_x}{\partial x}, \qquad P_{yy} = \Phi\frac{\partial V_y}{\partial y}, \qquad P_{zz} = \Phi\frac{\partial V_z}{\partial z},$$
$$P_{yz} = \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right), \qquad P_{zx} = \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right),$$
$$P_{xy} = \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right).$$

Pression cubique P :

$$P = \Psi \times V.$$

Vecteur-force $\overline{I}$:

$$I_x = (\Psi - \Phi)\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\Psi\left(\Delta V_x + \frac{\partial V}{\delta x}\right) + \frac{\partial(\Phi - \Psi)}{\partial x} V_{xx} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} V_{xx} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} V_{xy} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} V_{xz}.$$

En appelant $\overline{V'}$ le champ dérivant de la fonction Ψ

$$I_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[(\Phi - \Psi)\frac{\partial V_x}{\partial x}\right] + \frac{1}{2}\Psi\left(\Delta V_x + \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \overline{V'}\overline{V'_x}.$$

De même

$$I_y = \frac{\partial}{\partial y}\left[(\Phi - \Psi)\frac{\partial V_y}{\partial y}\right] + \frac{1}{2}\Psi\left(\Delta V_y + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \overline{V'}\overline{V'_y},$$
$$I_z = \frac{\partial}{\partial z}\left[(\Phi - \Psi)\frac{\partial V_z}{\partial z}\right] + \frac{1}{2}\Psi\left(\Delta V_z + \frac{\partial V}{\partial z}\right) + \overline{V'}\overline{V'_z}.$$

Digitized by Google

55. *Champ* $\overline{\overline{P_7}}$. — Nous désignerons ainsi un champ dont le vecteur-force $\bar{I}$ dérive du potentiel P.

$$I_x = \frac{\partial P}{\partial x},$$
$$I_y = \frac{\partial P}{\partial y},$$
$$I_z = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Le champ $\overline{\overline{P_1}}$ est un champ $\overline{\overline{P_7}}$.

56. *Champ* $\overline{\overline{P_8}}$. — Le vecteur-force $\bar{I}$ dérive d'un potentiel quelconque ϖ

$$I_x = \frac{\partial \varpi}{\partial x},$$
$$I_y = \frac{\partial \varpi}{\partial y},$$
$$I_z = \frac{\partial \varpi}{\partial z}.$$

Les champs $\overline{\overline{P_1}}$, $\overline{\overline{P_7}}$ et $\overline{\overline{P_9}}$ sont des champs $\overline{\overline{P_8}}$.

57. *Champ* $\overline{\overline{P_9}}$ ou *champ normal.* — Toutes les pressions se réduisent à des pressions normales.

On peut conclure de la relation fondamentale des champs quadratiques qu'il faut et qu'il suffit pour cela que les relations suivantes soient satisfaites

$$P_{xx} = P_{yy} = P_{zz} = \frac{1}{3} P,$$
$$P_{yz} = P_{zx} = P_{xy} = 0.$$

Le vecteur-force $\bar{I}$ devient

$$I_x = \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} = \frac{1}{3}\frac{\partial P}{\partial x},$$
$$I_y = \frac{1}{3}\frac{\partial P}{\partial y},$$
$$I_z = \frac{1}{3}\frac{\partial P}{\partial z}.$$

$\bar{I}$ dérive du potentiel $\frac{1}{3}$ P.

Digitized by Google

La divergence du vecteur $\overline{\mathrm{I}}$ vaut $\frac{1}{3}\Delta \mathrm{P}$.

Le produit $\overline{\overline{\mathrm{A}}}\,\overline{\overline{\mathrm{P}}}$ s'écrit

$$\overline{\overline{\mathrm{A}}}\,\overline{\overline{\mathrm{P}}} = \mathrm{P}_{xx}\mathrm{A}_{xx} + \mathrm{P}_{yy}\mathrm{A}_{yy} + \mathrm{P}_{zz}\mathrm{A}_{zz} = \frac{1}{3}\,\mathrm{P}\,(\mathrm{A}_{xx} + \mathrm{A}_{yy} + \mathrm{A}_{zz}) = \frac{1}{3}\,\mathrm{P} \times \mathrm{A}.$$

Le produit principal $\overline{\overline{\mathrm{P}}}\,\overline{\overline{\mathrm{P}}}$ vaut $\left(\frac{1}{3}\,\mathrm{P}\right)^2$.

Le vecteur de produit $\overline{\overline{\mathrm{B}}}\,\overline{\overline{\mathrm{P}}}$ a pour composantes

$$\overline{\mathrm{B}_x}\,\overline{\mathrm{P}_x} = \frac{1}{3}\,\mathrm{P} \times \mathrm{B}_x,$$

$$\overline{\mathrm{B}_y}\,\overline{\mathrm{P}_y} = \frac{1}{3}\,\mathrm{P} \times \mathrm{B}_y,$$

$$\overline{\mathrm{B}_z}\,\overline{\mathrm{P}_z} = \frac{1}{3}\,\mathrm{P} \times \mathrm{B}_z.$$

Le vecteur $\overline{\overline{\mathrm{B}}}\,\overline{\overline{\mathrm{P}}}$ est donc parallèle au vecteur $\overline{\mathrm{B}}$.

Le champ quadratique des produits principaux des pressions $\overline{\overline{\mathrm{P}}}\,\overline{\overline{\mathrm{P}}}$ (n° 35) est déterminé par les six fonctions

$$\overline{\mathrm{P}_x}\,\overline{\mathrm{P}_x} = \overline{\mathrm{P}_y}\,\overline{\mathrm{P}_y} = \overline{\mathrm{P}_z}\,\overline{\mathrm{P}_z} = \left(\frac{1}{3}\,\mathrm{P}\right)^2,$$

$$\overline{\mathrm{P}_y}\,\overline{\mathrm{P}_z} = \overline{\mathrm{P}_z}\,\overline{\mathrm{P}_y} = \overline{\mathrm{P}_x}\,\overline{\mathrm{P}_y} = 0.$$

C'est donc aussi un champ quadratique normal.

Digitized by Google

DEUXIÈME PARTIE.

APPLICATIONS.

PREMIÈRE APPLICATION.

ÉTUDE CINÉMATIQUE DE LA VITESSE ET DE L'ACCÉLÉRATION DANS LE MOUVEMENT D'UN MILIEU CONTINU.

I. — Vitesse.

58. Adoptons les notations d'Euler.

Soient x, y, z les coordonnées instantanées d'un point du milieu continu par rapport à un système d'axes rectangulaires fixes $oxyz$.

u, v, w les composantes de la vitesse de ce point, suivant les axes.

Nous ne considérerons que les mouvements continus du milieu tels que les composantes u, v, w de la vitesse sont des fonctions continues de x, y, z et t.

$$(1)\qquad \begin{cases} u = \varphi_1(x, y, z, t), \\ v = \varphi_2(x, y, z, t), \\ w = \varphi_3(x, y, z, t). \end{cases}$$

A chaque instant, l'ensemble des vitesses de tous les points du milieu constituent un champ continu de vecteurs $\overline{V}$.

Il se présente des cas particuliers remarquables lorsque le champ $\overline{V}$ est un champ $\overline{V_1}$ ou un champ $\overline{V_2}$, et lorsque les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (1) sont indépendantes de t; dans ce dernier cas le mouvement est dit *permanent*.

II. — Accélération.

59. *Notation.* — Étant donnée une fonction continue

$$F(x, y, z, t),$$

nous appellerons *dérivée de cette fonction en suivant le point dans son mouvement,* ou *dérivée le long de la trajectoire du point,* la dérivée totale

Digitized by Google

en t de la fonction F, x, y, z étant des fonctions de t dont les dérivées en t sont u, v, w.

Nous noterons :

$$\frac{d\mathrm{F}}{dt} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}u + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}v + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}w + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}.$$

60. Soit $\overline{\mathrm{J}}$ l'accélération instantanée du point $\mathrm{M}(xyz)$ à l'instant t.

Nous aurons

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathrm{J}_x = \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial x}u + \dfrac{\partial u}{\partial y}v + \dfrac{\partial u}{\partial z}w + \dfrac{\partial u}{\partial t}, \\ \mathrm{J}_y = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial v}{\partial x}u + \dfrac{\partial v}{\partial y}v + \dfrac{\partial v}{\partial z}w + \dfrac{\partial v}{\partial t}, \\ \mathrm{J}_z = \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial x}u + \dfrac{\partial w}{\partial y}v + \dfrac{\partial w}{\partial z}w + \dfrac{\partial w}{\partial t}. \end{cases}$$

Faisons usage des notations du champ quadratique dérivant du champ des vecteurs $\overline{\mathrm{V}}(u, v, w)$.

Soit $\overline{\overline{\Theta}}$ la notation de ce champ quadratique.

Nous aurons

$$\Theta_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \Theta_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \Theta_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\Theta_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\right), \qquad \Theta_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \qquad \Theta_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Soit encore $\overline{\mathrm{T}}$ le tourbillon de la vitesse $\overline{\mathrm{V}}$

$$\mathrm{T}_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right), \qquad \mathrm{T}_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad \mathrm{T}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Nous en concluons

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \Theta_{yz} + \mathrm{T}_{yz}, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = \Theta_{zx} + \mathrm{T}_{zx}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \Theta_{xy} + \mathrm{T}_{xy},$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \Theta_{zy} + \mathrm{T}_{zy}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \Theta_{xz} + \mathrm{T}_{xz}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \Theta_{yx} + \mathrm{T}_{yx}.$$

Par suite dans (2),

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathrm{J}_x = \dfrac{du}{dt} = \Theta_{xx}u + \Theta_{xy}v + \Theta_{xz}w + \mathrm{T}_{xy}v + \mathrm{T}_{xz}w + \dfrac{\partial u}{\partial t}, \\ \mathrm{J}_y = \dfrac{dv}{dt} = \Theta_{yx}u + \Theta_{yy}v + \Theta_{yz}w + \mathrm{T}_{yz}w + \mathrm{T}_{yx}u + \dfrac{\partial v}{\partial t}, \\ \mathrm{J}_z = \dfrac{dw}{dt} = \Theta_{zx}u + \Theta_{zy}v + \Theta_{zz}w + \mathrm{T}_{zx}u + \mathrm{T}_{zy}v + \dfrac{\partial w}{\partial t}. \end{cases}$$

Digitized by Google

61. Décomposons le vecteur $\overline{J}$ en trois vecteurs composants $\overline{D}$, $\overline{R}$ et $\overline{N}$ déterminés par les projections suivantes :

$$(4)\qquad \begin{cases} D_x = \Theta_{xx}u + \Theta_{xy}v + \Theta_{xz}w = \overline{V}\overline{\Theta_x}, \\ D_y = \Theta_{yx}u + \Theta_{yy}v + \Theta_{yz}w = \overline{V}\overline{\Theta_y}, \\ D_z = \Theta_{zx}u + \Theta_{zy}v + \Theta_{zz}w = \overline{V}\overline{\Theta_z}. \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} R_x = T_{xy}v + T_{xz}w, \\ R_y = T_{yz}w + T_{yx}u, \\ R_z = T_{zx}u + T_{zy}v. \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} N_x = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \\ N_y = \dfrac{\partial v}{\partial t}, \\ N_z = \dfrac{\partial w}{\partial t}. \end{cases}$$

Nous appellerons :

$\overline{D}$ accélération par déformation ;

$\overline{R}$ accélération par rotation ou tourbillon ;

$\overline{N}$ accélération par non-permanence.

Il n'est pas nécessaire de justifier la dénomination du vecteur $\overline{N}$. Donnons quelques éclaircissements au sujet des vecteurs $\overline{D}$ et $\overline{R}$.

III. — Accélération par déformation.

62. Le vecteur $\overline{D}$ est le vecteur principal du produit du champ $\overline{V}$ et de son champ quadratique dérivé $\overline{\overline{\Theta}}$ (n° **32**). Ce vecteur est donc invariant avec le choix des axes de coordonnées orthogonaux.

On peut démontrer, par les théorèmes suivants, que l'existence du vecteur $\overline{D}$ ou du champ quadratique $\overline{\overline{\Theta}}$ caractérise la *déformation* instantanée du milieu pendant le mouvement.

63. Théorème. — *Si entre deux époques t' et t'', le champ quadratique $\overline{\overline{\Theta}}$ disparaît, c'est-à-dire si à chaque instant et en chaque point du milieu*

Digitized by Google

l'on a

$$\Theta_{xx}=\Theta_{yy}=\Theta_{zz}=\Theta_{yz}=\Theta_{zx}=\Theta_{xy}=0, \tag{7}$$

les distances des points restent invariables dans le mouvement (1).

En effet, de

$$\Theta_{xx}=\Theta_{yy}=\Theta_{zz}=0,$$

on conclut d'abord

$$u=f_1(yzt),$$
$$v=f_2(zxt),$$
$$w=f_3(xyt).$$

Puis, à cause de $\Theta_{xy}=0$,

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial x}=0,$$

$\frac{\partial f_1}{\partial y}$ ne renferme donc ni x, ni y.

Cette propriété étant vraie par permutation pour toutes les fonctions et toutes les variables, on en conclura que u, v, w sont des fonctions linéaires x, y et z. En posant ces formes linéaires *a priori* et en vérifiant alors les six relations de condition (7), on trouve

$$\begin{cases} u=qz-ry+u_0, \\ v=rx-pz+v_0, \\ w=py-qx+w_0, \end{cases} \tag{8}$$

relations dans lesquelles p, q, r, u_0, v_0, w_0 sont six fonctions de t seulement.

Les relations (8), écrites pour deux points, donnent par différence

$$\left.\begin{aligned} u_1-u_2&=q(z_1-z_2)-r(y_1-y_2) \\ v_1-v_2&=r(x_1-x_2)-p(z_1-z_2) \\ w_1-w_2&=p(y_1-y_2)-q(x_1-x_2) \end{aligned}\right| \begin{aligned} &(x_1-x_2), \\ &(y_1-y_2), \\ &(z_1-z_2). \end{aligned}$$

En faisant les multiplications indiquées, on obtient

$$\frac{d}{dt}[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]=0. \tag{9}$$

La distance des deux points quelconques considérés reste donc bien inva-

(1) *Voir* par exemple, à ce sujet, POINCARÉ, *Leçons sur l'élasticité*, p. 13 (E. Naud).

Digitized by Google

riable dans le mouvement, si la relation (9) existe d'une façon permanente dans l'intervalle de temps envisagé.

64. THÉORÈME RÉCIPROQUE. — *Si entre les époques t' et t'', le mouvement se réduit à un simple déplacement général laissant inaltérée la distance des points, les relations suivantes sont satisfaites à chaque instant et en chaque point du milieu :*

$$\Theta_{xx}=\Theta_{yy}=\Theta_{zz}=\Theta_{yz}=\Theta_{zx}=\Theta_{xy}=0.$$

Considérons, en effet, le système d'axes fixes $ox'y'z'$, ox' étant parallèle au segment $\overline{M_1M_2}$ à un instant t compris entre t' et t''. La distance M_1M_2 étant invariable dans le mouvement, la relation (9), écrite pour les axes $ox'y'z'$, est satisfaite à chaque instant.

A l'instant t, elle se réduit pour les points M_1, M_2 à $(u'_1-u'_2)(x'_1-x'_2)=0$, ce qui exige $u'_1=u'_2$.

Ce dernier résultat est vrai pour tous les points M_1 et M_2 tels que $\overline{M_1M_2}$ est parallèle à l'instant t à ox'. Il résulte de ce qui précède que u' ne saurait varier avec x'; on a donc

$$\frac{\partial u'}{\partial x'}=0.$$

Si (α) est la direction de ox' par rapport au système d'axes $oxyz$, on a $\frac{\partial u'}{\partial x'}=\Theta_{\alpha\alpha}$, et par suite

$$\Theta_{\alpha\alpha}=0.$$

Mais la relation fondamentale du champ bilinéaire quadratique $\overline{\overline{\Theta}}$ donne

$$\Theta_{\alpha\alpha}=\Theta_{xx}\alpha_1^2+\Theta_{yy}\alpha_2^2+\Theta_{zz}\alpha_3^2+2(\Theta_{yz}\alpha_2\alpha_3+\Theta_{zx}\alpha_3\alpha_1+\Theta_{xy}\alpha_1\alpha_2). \tag{10}$$

Il faut que $\Theta_{\alpha\alpha}$ soit nul quelle que soit la direction quelconque (α) que l'on a choisie, les raisonnements précédents se répétant pour une autre direction (β).

On en conclut par (10), où $\Theta_{\alpha\alpha}$ doit s'annuler quels que soient α_1, α_2, α_3, que

$$\Theta_{xx}=\Theta_{yy}=\Theta_{zz}=\Theta_{yz}=\Theta_{zx}=\Theta_{xy}=0.$$

C. Q. F. D.

Digitized by Google

65. L'existence du vecteur $\overline{D}$ ou du champ quadratique $\overline{\overline{\Theta}}$ caractérise donc bien la déformation instantanée du milieu.

On accentue cette conclusion en montrant que Θ_{xx}, Θ_{yy}, Θ_{zz} sont des *vitesses de dilatation* suivant ox, oy, oz, dans la déformation du milieu, et que Θ_{yz}, Θ_{zx}, Θ_{xy} correspondent à des *vitesses de glissement* (1).

66. *Remarque.* — On a vu (n° **51**) que les projections de $\overline{D}$ peuvent se mettre sous la forme :

$$D_x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2+w^2) + T_{xy}v + T_{xz}w = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\overline{V}\overline{V}) + R_x,$$

$$D_y = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(\overline{V}\overline{V}) + R_y,$$

$$D_z = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}(\overline{V}\overline{V}) + R_z.$$

On pourrait donc décomposer le vecteur $\overline{J}$ en un vecteur dérivant du potentiel $\frac{1}{2}(\overline{V}\overline{V})$, un vecteur $2\overline{R}$ et un vecteur $\overline{N}$.

IV. — Accélération par rotation.

67. Les formules (5) montrent que le vecteur $\overline{R}$ est le moment principal (n° **51**) du champ des vitesses $\overline{V}$. Ce vecteur $\overline{R}$ est donc invariant avec le choix des axes orthogonaux de coordonnées.

Dans le cas du déplacement général sans déformations on peut vérifier à l'aide des formules (8) que l'on a

$$T_{yz} = -p, \qquad T_{zx} = -q, \qquad T_{xy} = -r.$$

Le vecteur $-\overline{T}$ est donc la *rotation instantanée* du milieu dans ce mouvement. D'où la dénomination du vecteur $\overline{R}$.

Cette notion de rotation se maintient dans le cas des mouvements accompagnés de déformations. Cauchy a démontré que $\overline{T}$ est une sorte de *rotation instantanée moyenne* du milieu; M. Boussinesq a aussi remarqué

(1) *Voir*, par exemple, APPELL, *Mécanique*, t. III, p. 288.

Digitized by Google

que $\overline{T}$ est la rotation instantanée du trièdre fluide formé par les trois directions principales du champ $\overline{\overline{\Theta}}$ à l'instant t (¹).

V. — Champs bilinéaires dérivant du vecteur $\overline{J}$ d'accélération.

68. L'ensemble des vecteurs d'accélération constitue, à un instant déterminé, un champ de vecteurs dont il est intéressant d'étudier le champ tourbillonnaire et le champ quadratique dérivés.

Les éléments de ceux-ci, c'est-à-dire les dérivées partielles de l'accélération, sont unis aux dérivées partielles de la vitesse par des formules que nous allons développer.

Nous utiliserons les notations suivantes :

$$\Theta'_{xx}=\frac{d}{dt}\Theta_{xx},\qquad \Theta'_{xy}=\frac{d}{dt}\Theta_{xy},\qquad T'_{xy}=\frac{d}{dt}T_{xy},$$

$$\Theta''_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}J_x=\frac{\partial}{\partial x}\frac{du}{dt},\qquad \Theta''_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial J_x}{\partial y}+\frac{\partial J_y}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{du}{dt}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{dv}{dt}\right);$$

$$T''_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial J_x}{\partial y}-\frac{\partial J_y}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{du}{dt}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{dv}{dt}\right).$$

Nous définirons de même

$$\Theta'_{yy}\text{ et }\Theta''_{yy},\qquad \Theta'_{zz}\text{ et }\Theta''_{zz},\qquad \Theta'_{yz}\text{ et }\Theta''_{yz},\qquad \Theta'_{zx}\text{ et }\Theta''_{zx},$$

$$T'_{yz}\text{ et }T''_{yz},\qquad T'_{zx}\text{ et }T''_{zx}.$$

Nous déterminons ainsi les éléments de deux champs quadratiques $\overline{\overline{\Theta'}}$ et $\overline{\overline{\Theta''}}$, et de deux champs tourbillonnaires $\overline{\overline{T'}}$ et $\overline{\overline{T''}}$.

69. On trouve, par simple différentiation,

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial J_x}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{du}{dt}=\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial J_x}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{du}{dt}=\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial w}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial J_x}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{du}{dt}=\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial w}{\partial z}; \end{cases}$$

(¹) Cours de MM. Boussinesq et Appell à la Sorbonne.

Digitized by Google

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial J_x}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial J_y}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{\partial w}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial J_y}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{\partial w}{\partial z}; \end{cases}$$

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial J_z}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial J_z}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial w}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial J_z}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial w}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

On en conclut les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \Theta''_{xx} &= \Theta'_{xx} + (\Theta_{xx})^2 + (\Theta_{xy})^2 + (\Theta_{xz})^2 - (T_{xy})^2 - (T_{xz})^2, \\ \Theta''_{yy} &= \Theta'_{yy} + (\Theta_{yy})^2 + (\Theta_{yz})^2 + (\Theta_{yx})^2 - (T_{yz})^2 - (T_{yx})^2, \\ \Theta''_{zz} &= \Theta'_{zz} + (\Theta_{zz})^2 + (\Theta_{zx})^2 + (\Theta_{zy})^2 - (T_{zx})^2 - (T_{zy})^2. \end{aligned}$$

On obtient par addition,

$$(14)\qquad \begin{cases} \Theta'' = \Theta' + (\Theta_{xx})^2 + (\Theta_{yy})^2 + (\Theta_{zz})^2 + 2[(\Theta_{yz})^2 + (\Theta_{zx})^2 + (\Theta_{xy})^2] \\ \qquad - 2[(T_{yz})^2 + (T_{zx})^2 + (T_{xy})^2] \\ \text{ou bien} \\ \qquad \Theta' = \Theta' + \overline{\overline{\Theta}}\,\overline{\overline{\Theta}} - 2\,\overline{T}\,\overline{T}. \end{cases}$$

On trouve ensuite

$$(15)\qquad \begin{cases} \Theta''_{yz} = \Theta'_{yz} + \Theta_{xy}\Theta_{xz} + (\Theta_{yy} + \Theta_{zz})\,\Theta_{yz} - T_{xy}T_{xz}, \\ \Theta''_{zx} = \Theta'_{zx} + \Theta_{yz}\Theta_{yx} + (\Theta_{zz} + \Theta_{xx})\Theta_{zx} - T_{yz}T_{yx}, \\ \Theta''_{xy} = \Theta'_{xy} + \Theta_{zx}\Theta_{zy} + (\Theta_{xx} + \Theta_{yy})\Theta_{xy} - T_{zx}T_{zy}; \end{cases}$$

$$(16)\qquad \begin{cases} T''_{yz} = T'_{yz} - \Theta_{xz}T_{xy} - \Theta_{yx}T_{zx} + (\Theta_{yy} + \Theta_{zz})T_{yz}, \\ T''_{zx} = T'_{zx} - \Theta_{yx}T_{yz} - \Theta_{zy}T_{xy} + (\Theta_{zz} + \Theta_{xx})T_{zx}, \\ T''_{xy} = T'_{xy} - \Theta_{zy}T_{zx} - \Theta_{xz}T_{yz} + (\Theta_{xx} + \Theta_{yy})T_{xy}. \end{cases}$$

VI. — Transport à la vitesse des propriétés de l'accélération.

70. Les relations que nous venons d'établir permettent de mettre en évidence des similitudes remarquables entre certaines propriétés des vecteurs-vitesse et des vecteurs-accélération.

Digitized by Google

Nous allons résumer ces propriétés dans les théorèmes suivants :

THÉORÈME. — *Supposons qu'entre deux époques t' et t'' les dérivées partielles du champ des vitesses satisfont à l'une des propriétés suivantes, à chaque instant et en chaque point du milieu :*

I.

$$1^\circ \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}=0;$$

$$2^\circ \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial y}=0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z}=0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=0;$$

$$3^\circ \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}=0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial y}=0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial z}=0;$$

$$4^\circ \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z}=0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}=0;$$

$$5^\circ \quad T_{yz}=T_{zx}=T_{xy}=0.$$

Nous allons démontrer que la relation correspondante sera vérifiée par le champ des accélérations, c'est-à-dire qu'à chacune des hypothèses précédentes correspondra l'une des conclusions suivantes :

II.

$$1^\circ \quad \frac{\partial J_x}{\partial y}=\frac{\partial J_x}{\partial z}=0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial J_y}{\partial z}=\frac{\partial J_y}{\partial x}=0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial J_z}{\partial x}=\frac{\partial J_z}{\partial y}=0;$$

$$2^\circ \quad \frac{\partial J_x}{\partial y}=\frac{\partial J_z}{\partial y}=0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial J_y}{\partial z}=\frac{\partial J_x}{\partial z}=0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial J_z}{\partial x}=\frac{\partial J_y}{\partial x}=0;$$

$$3^\circ \quad \frac{\partial J_x}{\partial x}=\frac{\partial J_y}{\partial x}=\frac{\partial J_z}{\partial x}=0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial J_x}{\partial y}=\frac{\partial J_y}{\partial y}=\frac{\partial J_z}{\partial y}=0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial J_x}{\partial z}=\frac{\partial J_y}{\partial z}=\frac{\partial J_z}{\partial z}=0;$$

$$4^\circ \quad \frac{\partial J_x}{\partial x}=\frac{\partial J_x}{\partial y}=\frac{\partial J_x}{\partial z}=0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial J_y}{\partial x}=\frac{\partial J_y}{\partial y}=\frac{\partial J_y}{\partial z}=0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial J_z}{\partial x}=\frac{\partial J_z}{\partial y}=\frac{\partial J_z}{\partial z}=0;$$

$$5^\circ \quad T''_{yz}=T''_{zx}=T'_{xy}=0.$$

La démonstration de ce théorème est immédiate à l'aide des formules du paragraphe V.

Ainsi, montrons que si

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

Digitized by Google

on a

$$\frac{\partial J_x}{\partial y} = \frac{\partial J_x}{\partial z} = 0.$$

$\frac{\partial u}{\partial y}$ étant nul à chaque instant quels que soient x, y, z et t, nous avons

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

par suite

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

De même

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Les deux dernières relations (11) montrent alors que $\frac{\partial J_x}{\partial y}$ et $\frac{\partial J_x}{\partial z}$ sont identiquement nulles.

C. Q. F. D.

Une démonstration absolument identique à celle-ci peut être produite dans toutes les autres hypothèses.

Remarquons que l'hypothèse du 5° conduit à ce théorème intéressant :

Si, entre deux époques, le champ des vitesses dérive d'un potentiel, il en est ainsi du champ des accélérations.

71. Théorème réciproque. — Il s'énonce de la manière suivante :

1° *Si une des relations* (II) *est continûment vérifiée à chaque instant entre deux époques t' et t''*;

2°. *Si la relation* (I) *correspondante est vérifiée à un instant t_0 compris entre t' et t''*;

Cette relation (I) *sera continûment vérifiée dans tout l'intervalle de temps $(t'' - t')$.*

Nous allons donner à ce théorème une démonstration analogue à celle que l'on peut trouver dans Appell (*Mécanique*, t. III, p. 350) pour le *théorème de Lagrange*, qui est le cas du 5° du présent théorème.

Démontrons par exemple que si $\frac{\partial J_x}{\partial y} = \frac{\partial J_x}{\partial z} = 0$, on a aussi $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, dans les conditions énoncées.

Digitized by Google

« Le mouvement étant supposé déterminé, en suivant une particule dans son mouvement, on a à chaque instant

$$\frac{\partial J_x}{\partial y} = \frac{\partial J_x}{\partial z} = 0;$$

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z}$, étant remplacées dans les deux dernières relations (11) par leurs valeurs en fonction de t on peut regarder ces équations comme un système de deux équations différentielles linéaires et homogènes définissant $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial z}$ en fonction du temps. L'intégration de ces équations fournira pour $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial z}$ des fonctions de t dépendant d'une façon linéaire et homogène de deux constantes arbitraires qui seront par exemple les valeurs $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$ des deux fonctions à l'instant t_0. On aura ainsi des expressions de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 f_1(t) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 f_2(t),$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \varphi_1(t) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 \varphi_2(t).$$

» Dès lors, si à l'instant t_0 les valeurs de $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$ sont nulles, $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial z}$ le sont à un instant quelconque. »

Une démonstration analogue se reproduirait dans toutes les autres hypothèses envisagées dans (II).

Le 5° correspond au célèbre *théorème de Lagrange* : « *Dans les conditions énoncées, si l'accélération dérive d'un potentiel, il en est ainsi de la vitesse.* »

72. *Cas où la propriété de l'accélération n'est réalisée à aucun moment par la vitesse.* — Le théorème de Lagrange et ses congénères exigent que la propriété reconnue aux dérivées partielles de l'accélération soit vérifiée à un instant t_0 par les dérivées partielles correspondantes de la vitesse.

Le mouvement offre-t-il des singularités si l'on ne trouve aucun instant t_0, compris entre t' et t'', où la propriété de la vitesse est réalisée?

Digitized by Google

La réponse est affirmative; par exemple, l'étude du mouvement correspondant au théorème de Lagrange ainsi généralisé constitue la célèbre théorie des tourbillons de Helmholtz, dont on peut trouver toutes les déductions à l'aide des seules équations (16) dans lesquelles on ferait

$$T''_{yz} = T''_{zx} = T''_{xy} = 0.$$

En la présentant comme nous venons de le faire, nous mettons bien en évidence l'essence cinématique de la théorie des tourbillons. On s'accorde généralement à lui reconnaître ce caractère; ainsi M. Appell dit dans son cours de Mécanique (t. III, p. 387) : « ... ces théorèmes (de la théorie des tourbillons) s'appliquent toutes les fois que les accélérations d'un fluide dérivent d'un potentiel uniforme dans toute l'étendue du fluide à chaque instant ».

73. Observons en terminant que si les relations (16) ne sont pas celles suivant lesquelles on donne habituellement les équations de Helmholtz, il est pourtant très aisé de retrouver celles-ci avec ces relations (16).

ρ étant la densité en un point, on peut écrire

$$\frac{d}{dt}\frac{T_{yz}}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left(T'_{yz} - \frac{T_{yz}}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right).$$

Mais l'équation de continuité (1) donne

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\Theta = 0,$$

par suite

$$\frac{d}{dt}\frac{T_{yz}}{\rho} = \frac{1}{\rho}(T'_{yz} + T_{yz}\Theta).$$

D'un autre côté les relations (16) dans lesquelles $T''_{yz} = T''_{zx} = T''_{xy} = 0$ donnent

$$\begin{aligned}(T'_{yz} + T_{yz}\Theta) &= \Theta_{xz}T_{xy} + \Theta_{yx}T_{zx} + \Theta_{xx}T_{yz},\\ &= \Theta_{xx}T_{yz} + (\Theta_{yx} + T_{yx})T_{zx} + (\Theta_{zx} + T_{zx})T_{xy},\\ &= \Theta_{xx}T_{yz} + (\Theta_{xy} + T_{xy})T_{zx} + (\Theta_{xz} + T_{xz})T_{xy},\end{aligned}$$

(1) *Voir*, par exemple : APPELL, *Mécanique*, t. III, p. 278.

Digitized by Google

puisque

$$T_{yx} = -T_{xy} \qquad \text{et} \qquad T_{zx} = -T_{xz}.$$

En repassant aux notations des dérivées partielles

$$\frac{d}{dt}\frac{T_{yz}}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{T_{yz}}{\rho} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{T_{zx}}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{T_{xy}}{\rho}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{T_{yz}}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{T_{yz}}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{T_{zx}}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{T_{xy}}{\rho}.$$

Ce sont les deux formes classiques d'une des trois équations de Helmholtz, dont ce savant a déduit les diverses conséquences de sa théorie, sur laquelle nous n'insisterons pas (¹).

Nous nous contenterons de citer ici le théorème de Helmholtz : *Les éléments fluides qui, à un instant t_0, se trouvent sur une surface ou une ligne de tourbillon, se trouvent encore à un instant postérieur quelconque t sur une surface ou une ligne de tourbillon.*

(¹) Pour les détails de la théorie des tourbillons, consulter, parmi les Ouvrages écrits en français : POINCARÉ, *Théorie des tourbillons* (Paris, Carré, 1893); APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, Chap. XXXV (Gauthier-Villars, 1903).

Digitized by Google

DEUXIÈME APPLICATION.

PREMIER EXEMPLE DE PRESSIONS RÉSULTANT DE SOMMES DE VECTEURS ASSIMILABLES A DES ACTIONS MOLÉCULAIRES.

74. On sait que, *dans un corps solide élastique, les composantes des pressions physiques constituent les éléments d'un champ bilinéaire quadratique*. Nous n'insisterons pas sur les démonstrations classiques à l'aide desquelles on établit cette proposition (1).

Nous plaçant à un point de vue particulier, qui semble se rapprocher des réalités physiques, nous allons étudier divers problèmes concernant des pressions exercées dans des milieux soumis à des *forces moléculaires* de diverses natures.

75. Étant donné un champ continu de vecteurs $\overline{I}$, considérons un petit élément de volume $\delta\varpi_1$ ayant centre de figure au point N.

Supposons que l'on puisse toujours prendre $\delta\varpi_1$ assez petit pour que le champ $\overline{I}$ soit sensiblement composé de vecteurs équipollents à l'intérieur de $\delta\varpi_1$.

Dans ces conditions faisons correspondre à l'élément de volume $\delta\varpi_1$ un vecteur

$$\overline{I} \times \delta\varpi,$$

appliqué au point N.

Décomposons ce vecteur en une série de vecteurs composants émanant de N; soient

$$\overline{I}_1\delta\varpi_1, \quad \overline{I}_2\delta\varpi_1, \quad \ldots, \quad \overline{I}_e\delta\varpi_1, \quad \ldots, \quad \overline{I}_n\delta\varpi_1,$$

ces vecteurs, se répartissant d'une manière continue dans l'espace. Appelons $\overline{I}'$ le champ de vecteurs constitué par l'ensemble de ces vecteurs composants.

Considérons l'élément de surface $\delta\omega$ ayant centre de figure en M. Soit $M_{(\alpha)}$ la normale déterminant la face A de cet élément. La face B est déterminée par la normale $M_{(-\alpha)}$.

---

(1) *Voir*, par exemple, APPELL, *Loc. cit.*, t. III, Chap. XXX.

Digitized by Google

Étant donnés les divers points du milieu, envisageons les vecteurs tels que $\overline{I}_e \delta\varpi$, qui, émanant d'un point N et prolongés suivant leur *direction et sens,* percent l'élément $\delta\omega$ par la face A.

Soit $\overline{R'_\alpha} \times \delta\omega$ la résultante géométrique de translation de ces vecteurs.

Soit, de même, $\overline{R'_{-\alpha}}$ la résultante géométrique de translation des vecteurs perçant par la face B.

Posons

$$\overline{P'_\alpha} \times \delta\omega = (-\overline{R'_\alpha} + \overline{R'_{-\alpha}})\,\delta\omega$$

et appelons $\overline{P'_\alpha}$ la pression unitaire moyenne sur la face A de $\delta\omega$.

On remarquera que l'on a par définition

$$\overline{P'_{-\alpha}} \times \delta\omega = (-\overline{R'_{-\alpha}} + \overline{R_\alpha})\,\delta\omega = -\overline{P'_\alpha}\delta\omega.$$

Les champs de vecteurs étant continus, et $\delta\omega$ suffisamment petit, on peut admettre que $\overline{P'_\alpha}$ tend vers une limite $\overline{P_\alpha}$ dont la valeur est sensiblement indépendante de la forme de l'élément $\delta\omega$, lorsque $\delta\omega$ tend vers zéro.

De plus, si nous supposons alors que le vecteur $\overline{P_\alpha} \times \delta\omega$ est appliqué au point M, ce vecteur sera sensiblement la résultante géométrique unique, équivalente à tous les vecteurs qui concourent à former la pression.

Nous appellerons $\overline{P_\alpha}$: *la pression moyenne en* M *suivant la direction* α.

Nous allons démontrer que *l'ensemble des vecteurs* $\overline{P_\alpha}$ *constituent les pressions d'un certain champ bilinéaire quadratique* $\overline{\overline{P}}$, *dont le champ* $\overline{I}$ *est le champ des vecteurs-force.*

A chaque mode de décomposition différent du champ $\overline{I}$ suivant le champ $\overline{I'}$, correspondra en général un champ $\overline{\overline{P}}$ différent. Il sera donc aussi démontré qu'*il existe une infinité de champs quadratiques dont le champ* I *est le champ des vecteurs-force.*

76. *Démonstration.* — Nous allons démontrer que la composante $P_{\alpha\beta}$, suivant la direction (β) de la pression $\overline{P_\alpha}$ déterminée au n° **75**, satisfait à la formule fondamentale des champs quadratiques.

Digitized by Google

1° $P_{\alpha x}$, P_{xx}, P_{yx} et P_{zx} étant les composantes des pressions $\overline{P_\alpha}$, $\overline{P_x}$, $\overline{P_y}$ et $\overline{P_z}$ suivant la direction ox, on a la relation

$$P_{\alpha x} = P_{xx}\alpha_1 + P_{yx}\alpha_2 + P_{zx}\alpha_3. \tag{1}$$

Démonstration par le tétraèdre de Cauchy :

Appelons :

δh la distance du point M à la face ABC du tétraèdre,

$\delta\varpi$ le volume de celui-ci,

(α) la direction de la normale à ABC, comptée vers l'extérieur du tétraèdre,

+ S la surface totale extérieure de celui-ci,

— S la surface totale intérieure de celui-ci.

On a

$$\text{Surface ABC} = 3\,\frac{\delta\varpi}{\delta h},$$

$$\text{Surface MBC} = 3\alpha_1\,\frac{\delta\varpi}{\delta h},$$

$$\text{Surface MCA} = 3\alpha_2\,\frac{\delta\varpi}{\delta h},$$

$$\text{Surface MAB} = 3\alpha_3\,\frac{\delta\varpi}{\delta h}.$$

Subdivisons le tétraèdre $\delta\varpi$, sans solution de continuité, en une série de petits volumes $\delta\varpi_1$; à chacun de ceux-ci correspondent des vecteurs $\overline{I_e} \times \delta\varpi_1$; évaluons la résultante de translation de ces vecteurs.

La projection sur ox de cette résultante vaudra

$$\Sigma_{\delta\varpi} I_x \delta\varpi_1.$$

Nous pouvons évaluer cette même composante en fonction des pressions au travers de la surface du tétraèdre.

En effet $\Sigma_{-S}(\overline{R})_x \delta\omega$ correspond à la somme des projections des vecteurs de l'intérieur du tétraèdre, augmentée de celles de certains vecteurs émanant de points extérieurs au tétraèdre, qui perceraient celui-ci en deux

Digitized by Google

points : à l'entrée, par la surface extérieure du tétraèdre; à la sortie, par la surface intérieure du tétraèdre.

Les projections de ces vecteurs extérieurs constituent, aux points de percée de l'entrée, la somme $\Sigma_{+S}(\overline{R})_x \delta\omega$.

Par suite, on a

$$\Sigma_{\delta\varpi} I_x \delta\varpi_1 = \Sigma_{-S}(\overline{R})_x \delta\omega - \Sigma_{+S}(\overline{R})_x \delta\omega = + \Sigma_{+S}(\overline{P})_x \delta\omega.$$

En décomposant

$$\Sigma_{+S}(\overline{P})_x \delta\omega = \Sigma_{ABC} P_{\alpha x} \delta\omega - (\Sigma_{MBC} P_{xx} \delta\omega + \Sigma_{MCA} P_{yx} \delta\omega + \Sigma_{MAB} P_{zx} \delta\omega).$$

Si $\delta\varpi$ est suffisamment petit, on pourra, par approximation, remplacer les diverses sommes précédentes par des valeurs moyennes, et l'on trouvera

$$I_x \delta\varpi = - P_{\alpha x} \times \frac{3\,\delta\varpi}{\delta h} + P_{xx} \frac{3\,\delta\varpi}{\delta h} \alpha_1 + P_{yx} \frac{3\,\delta\varpi}{\delta h} \alpha_2 + P_{zx} \frac{3\,\delta\varpi}{\delta h} \alpha_3,$$

$\delta\varpi$ disparaissant de cette équation, si δh devient suffisamment petit, les diverses fonctions restant finies et continues, on arrivera à la relation suivante, qui sera vérifiée avec l'approximation que l'on voudra

$$P_{\alpha x} = P_{xx} \alpha_1 + P_{yx} \alpha_2 + P_{zx} \alpha_3.$$

On obtiendrait de la même manière les valeurs de $P_{\alpha y}$ et $P_{\alpha z}$.

Dans ces relations, il n'est pas encore permis de permuter les deux indices d'une composante de pression. Le premier indice indique la direction suivant laquelle on calcule la pression, le deuxième indice indique la direction sur laquelle la pression est projetée.

77. 2° En chaque point du milieu, l'on a

$$I_x = \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} \tag{2}$$

et deux relations correspondantes pour I_y et I_z.

Considérons le domaine D isolé dans le milieu par la surface fermée S; soit + S la surface extérieure de D; — S la surface intérieure; (α) la direction de la normale extérieure à S, au centre de figure d'un petit élément $\delta\omega$ de S.

Digitized by Google

Décomposons D sans solution de continuité en une série de petits éléments de volume $\delta\varpi_1$.

La composante suivant ox de la résultante de translation des vecteurs $\overline{I_e} \times \delta\varpi_1$ de l'intérieur de D atteint

$$\Sigma_D I_x \delta\varpi_1 ;$$

cette somme équivaut encore à

$$\Sigma_{+S} P_{\alpha x} \delta\omega.$$

En effet, on a

$$\Sigma_{+S} P_{\alpha x} \delta\omega = \Sigma_{-S}(\overline{R_\alpha})_x \delta\omega - \Sigma_{+S}(\overline{R_\alpha})_x \delta\omega.$$

Un vecteur $\overline{I_e}\delta\varpi_1$ émanant d'un point intérieur à D perce $-S$ aux points $N_1, N_3, \ldots, N_{2n+1}$ et $+S$ aux points $N_2, N_4, \ldots, N_{2n}$.

La composante de cette force figure donc $(n+1)$ fois dans $\Sigma_{-S}(R_\alpha)_x \delta\omega$ et n fois dans $\Sigma_{+S}(R_{-\alpha})_x \delta\omega$; elle figure donc une fois dans $\Sigma_{+S} P_{\alpha x} \delta\omega$.

Un vecteur $\overline{I_e}\delta\varpi$, émanant d'un point extérieur à D et pénétrant dans celui-ci, perce $+S$ aux points N_1, N_3, N_{2n-1} et $-S$ aux points $N_2, N_4, \ldots, N_{2n}$; la composante due à un tel vecteur disparaît donc de $\Sigma_{+S} P_{\alpha x} \delta\omega$. On a donc bien

$$\Sigma_D I_x \delta\varpi_1 = \Sigma_{+S} P_{\alpha x} \delta\omega,$$

ce qui donne, à l'aide de (1)

$$\Sigma_D I_x \delta\varpi_1 = \Sigma_{+S}(P_{xx}\alpha_1 + P_{yx}\alpha_2 + P_{zx}\alpha_3)\delta\omega.$$

Si les volumes $\delta\varpi_1$ sont suffisamment petits, on peut assimiler approximativement ces deux sommes à leurs intégrales limites.

On a donc

$$\int_D I_x d\varpi_1 = \int_{+S} (P_{xx}\alpha_1 + P_{yx}\alpha_2 + P_{zx}\alpha_3)\, d\omega,$$

puis par une des transformations du théorème de Green

$$\int_D I_x d\varpi_1 = \int_D \left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z}\right) d\varpi.$$

Cette relation devant être vérifiée quel que soit le volume D, on sait que l'on doit avoir

$$I_x = \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z},$$

C. Q. F. D.

Digitized by Google

78. 3° Démontrons enfin l'égalité des composantes tangentielles des pressions

$$P_{yz} = P_{zy}. \tag{3}$$

De même

$$P_{zx} = P_{xz}, \qquad P_{xy} = P_{yx}.$$

Soient

$$xyz, \quad x_1 y_1 z_1, \quad \ldots, \quad x_{2n} y_{2n} z_{2n}, \quad \ldots$$

les coordonnées du point N et des points de percée successifs par $-S$ et $+S$ du vecteur $\overline{I_e}\,\delta\varpi$ émanant de N.

Si N est extérieur à D on aura

$$\frac{I_{ex}}{x_2 - x_1} = \frac{I_{ey}}{y_2 - y_1} = \frac{I_{ez}}{z_2 - z_1},$$
$$\frac{I_{ex}}{x_4 - x_3} = \frac{I_{ey}}{y_4 - y_3} = \frac{I_{ez}}{z_4 - z_3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{I_{ex}}{x_{2n} - x_{2n-1}} = \frac{I_{ey}}{y_{2n} - y_{2n-1}} = \frac{I_{ez}}{z_{2n} - z_{2n-1}}.$$

On en conclut

$$\left\{\begin{array}{l} I_{ey}(z_2 + z_4 + \ldots + z_{2n}) \quad - I_{ez}(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n}) \\ = I_{ey}(z_1 + z_3 + \ldots + z_{2n-1}) - I_{ez}(y_2 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}). \end{array}\right. \tag{4}$$

Si N est intérieur à D, on prouvera de même

$$\left\{\begin{array}{l} I_{ey}(z_1 + z_3 + \ldots + z_{2n+1}) - I_{ez}(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n+1}) \\ = I_{ey}(z + z_2 + \ldots + z_{2n}) \quad - I_{ez}(y + y_2 + \ldots + y_{2n}). \end{array}\right. \tag{5}$$

Faisons les sommes suivantes

$$\Sigma_{+S}(P_{\alpha y} z - P_{\alpha z} y)\,\delta\omega = \Sigma_{-S}[(R_{-\alpha})_y z - (R_{-\alpha})_z y]\,\delta\omega - \Sigma_{+S}[(R_\alpha)_y z - (R_\alpha)_z y]\,\delta\omega,$$

sommes dans lesquelles x, y, z sont les coordonnées du centre de figure de l'élément $\delta\omega$.

En considérant les vecteurs qui composent $\overline{R_\alpha}$ et $\overline{R_{-\alpha}}$, on verra, à l'aide de (4) et de (5), que les divers termes se détruisent, sauf certains d'entre eux dont la somme se réduit à

$$\Sigma_D(I_y z - I_z y)\,\delta\varpi_1,$$

dans laquelle $I_y\,\delta\varpi_1$ et $I_z\,\delta\varpi_1$ sont les composantes du vecteur émanant d'un point intérieur à D, x, y, z les coordonnées de ce point.

Digitized by Google

On a donc

$$\Sigma_S(P_{\alpha y}z - P_{\alpha z}y)\,\delta\omega = \Sigma_D(I_y z - I_z y)\,\delta\varpi_1,$$

que l'on pourra approximativement remplacer par la relation entre intégrales :

$$\int_S (P_{\alpha y}z - P_{\alpha z}y)\,d\omega = \int_D (I_y z - I_z y)\,d\varpi_1. \tag{6}$$

Mais avec (1)

$$\int_S (P_{\alpha y}z - P_{\alpha z}y)\,d\omega$$
$$= \int_S [(P_{xy}z - P_{xz}y)\alpha_1 + (P_{yy}z - P_{yz}y)\alpha_2 + (P_{zy}z - P_{zz}y)\alpha_3]\,d\omega,$$

et par la transformation de Green

$$= \int_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(P_{xy}z - P_{xz}y) + \frac{\partial}{\partial y}(P_{yy}z - P_{yz}y) + \frac{\partial}{\partial z}(P_{zy}z - P_{zz}y)\right] d\varpi_1$$
$$= \int_D \left[\left(\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z}\right)z - \left(\frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z}\right)y + P_{zy} - P_{yz}\right] d\varpi_1.$$

(6) étant vérifiée quel que soit D, il faut donc

$$\begin{cases} z\left(\dfrac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial P_{zy}}{\partial z} - I_y\right) \\ -y\left(\dfrac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial P_{zz}}{\partial z} - I_z\right) + P_{zy} - P_{yz} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

A cause des relations (2) on conclut

$$P_{zy} = P_{yz}.$$

C. Q. F. D.

La démonstration aurait d'ailleurs pu servir à établir les relations (2), puisque (7) doit être satisfaite quelle que soit la position de l'origine o des axes, donc quels que soient y et z.

79. En projetant $\overline{P_\alpha}$ sur la direction (β), on obtient

$$P_{\alpha\beta} = P_{\alpha x}\beta_1 + P_{\alpha y}\beta_2 + P_{\alpha z}\beta_3;$$

à l'aide de (1) on retrouve ainsi la relation fondamentale des champs quadratiques

$$P_{\alpha\beta} = P_{xx}\alpha_1\beta_1 + P_{yy}\alpha_2\beta_2 + P_{zz}\alpha_3\beta_3 + P_{yz}(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) + P_{zx}(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) + P_{xy}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1),$$

puisque la réciprocité des composantes tangentielles est maintenant assurée.

Digitized by Google

Les vecteurs $\overline{P_\alpha}$ sont donc bien les pressions d'un champ quadratique $\overline{\overline{P}}$, dont $\overline{I}$ est vecteur-force.

80. Nous ne connaissons pas d'application immédiate des champs de pressions très généraux que nous venons de déterminer. Nous avons cependant cité cet exemple, pour les deux raisons suivantes :

1° Ces pressions conviennent à des actions moléculaires extrêmement générales.

On pourrait supposer, en effet, que les divers vecteurs formant le champ $\overline{I'}$ et qui ont en un point M une résultante égale à $\overline{I}$, sont autant d'actions exercées séparément sur le point M, par divers autres points du milieu.

Aucune hypothèse n'ayant été faite sur la grandeur et la direction de ces vecteurs $\overline{I'}$, on voit que les résultats analytiques que nous avons établis conviennent à des systèmes d'actions moléculaires absolument quelconques; celles-ci ne doivent pas nécessairement être des fonctions de la distance des points, ni être dirigées suivant le segment qui joint deux points entre lesquels elles s'exercent, ni satisfaire au principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

Peut-être pourrait-on tirer parti de ces résultats généraux dans certaines branches de la Physique mathématique.

2° Nous avons établi qu'à un champ de forces déterminé conviennent, analytiquement, une infinité de champs de pressions, c'est-à-dire une infinité d'ensembles de six fonctions $P_{xx}, P_{yy}, P_{zz}, P_{yz}, P_{zx}, P_{xy}$ qui sont reliées à la force par les formules (2). Dans la mécanique analytique des milieux déformables on utilise six fonctions de pressions qui satisfont aux formules (2) et à trois équations d'équilibre à la surface (1). On ne démontre pas que ce système de pression est unique (2). *Peut-être* y a-t-il donc là une lacune, qu'il est nécessaire de combler en donnant une définition plus complète du système de pression utilisé, ainsi qu'on le fait en Mécanique physique, lorsqu'on définit la pression à l'aide des actions moléculaires.

---

(1) *Voir* DUHEM, *Hydrodynamique, Elasticité, Acoustique*. T. I, p. 43.

(2) DUHEM, *Loc. cit.*, p. 44. (Dernier paragraphe du n° 2.)

Digitized by Google

TROISIÈME APPLICATION.

DEUXIÈME EXEMPLE DE PRESSIONS RÉSULTANT DE SOMMES VECTEURS ASSIMILABLES A DES ACTIONS MOLÉCULAIRES. — THÉORIE DE LA PROPAGATION DE LA CHALEUR PAR CONDUCTIBILITÉ DANS LES MILIEUX INDÉFINIS, PAR FOURIER.

I. — Vecteur différentiel.

81. Considérons un domaine D de l'espace limité par la surface S.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point M par rapport aux axes fixes $oxyz$.

Soient x_1, y_1, z_1 les projections sur ox, oy, oz du segment dirigé $\overline{MM_1}$ joignant le point M à un point quelconque M_1 du champ D.

Soit encore r_1 la grandeur absolue du segment $\overline{MM_1}$.

Considérons une fonction continue de x_1, y_1, z_1

$$f_1 = f_1(x_1^2, y_1^2, z_1^2)$$

qui soit telle que l'on ait

$$f_1(x_1^2, y_1^2, z_1^2) = f[(-x_1)^2(-y_1)^2(-z_1)^2]$$

et une autre fonction continue de x, y, z

$$\rho = \rho(x, y, z).$$

Entourons les points M et M_1 de deux éléments de volume $\delta\varpi$ et $\delta\varpi_1$ ayant respectivement centre de figure en M et M_1.

Nous admettrons que l'on peut toujours prendre $\delta\varpi$ et $\delta\varpi_1$ assez petits pour que les fonctions f_1 et ρ ne varient pas sensiblement pour toutes les positions possibles de M et M_1 respectivement dans $\delta\varpi$ et $\delta\varpi_1$.

Faisons correspondre, à chaque point M et pour chaque point M_1 du milieu, un *vecteur différentiel* partant de M, dirigé suivant $\overline{M_1M}$ si f_1 est positif, et suivant $\overline{MM_1}$ si f_1 est négatif, ce vecteur ayant la valeur

$$\rho\rho_1 f_1 \delta\varpi \delta\varpi_1$$

ρ et ρ_1 étant les valeurs de la fonction ρ aux points M et M_1.

Digitized by Google

Subdivisons le milieu sans solution de continuité en une multitude de petits éléments de volume $\delta\varpi$ satisfaisant aux conditions énoncées plus haut.

Appelons $\rho\overline{I}$ la résultante géométrique rapportée à l'unité de volume des vecteurs ainsi appliqués au point M. Nous aurons

$$(8)\qquad \begin{cases} I_x = -\Sigma\rho_1 f_1 \dfrac{x_1}{r_1}\delta\varpi_1, \\ I_y = -\Sigma\rho_1 f_1 \dfrac{y_1}{r_1}\delta\varpi_1, \\ I_z = -\Sigma\rho_1 f_1 \dfrac{z_1}{r_1}\delta\varpi_1. \end{cases}$$

II. — Pression de Navier.

82. Envisageons l'élément de surface $\delta\omega$ ayant centre de figure en N, dont la face A est orientée par la normale (α).

Considérons tous les segments tels que $\overline{MM_1}$ qui percent $\delta\omega$, M étant du côté A par rapport à $\delta\omega$.

Évaluons la résultante de translation des vecteurs différentiels correspondants, *appliqués aux points* M_1. Soit $\overline{P'_\alpha}\times\delta\omega$ cette résultante de translation.

$\overline{P'_\alpha}$ est la pression moyenne de Navier au travers de $\delta\omega$ (¹).

Si $\delta\omega$ devient suffisamment petit, on peut admettre que $\overline{P'_\alpha}$ prend une valeur sensiblement indépendante de la forme de $\delta\omega$; de plus, le système des vecteurs différentiels composants $\overline{P'_\alpha}\delta\omega$ admet alors sensiblement une résultante unique qui passe par le centre de figure N de $\delta\omega$.

Soit $\overline{P_\alpha}$ cette valeur limite de $\overline{P'_\alpha}$; nous l'appellerons *pression de Navier au point* N *dans la direction* (α).

Il est aisé de vérifier que $\overline{P_{-\alpha}} = P_\alpha$.

En effet, d'après la forme de la fonction f_1, au vecteur différentiel appliqué en M_1 et dépendant du point M correspond un vecteur égal et directement opposé au premier, appliqué en M et correspondant au point M_1.

(¹) *Voir* à ce sujet : POINCARÉ, *Élasticité*, p. 73.

Digitized by Google

Ce dernier vecteur entre dans la somme constituant la pression de Navier au travers de la face B de l'élément $\delta\omega$.

On a donc bien

$$\overline{P'_{-\alpha}} \times \delta\omega = -\overline{P'_{\alpha}} \times \delta\omega$$

et, par suite,

$$\overline{P_{-\alpha}} = -\overline{P_{\alpha}}.$$

83. Nous allons démontrer que la pression de Navier constitue la pression dans un champ quadratique $\overline{\overline{P}}$, dont $\rho\overline{I}$ est le vecteur-force.

1° *Théorème du tétraèdre de Cauchy.*

Utilisons les notations du n° **76**; nous aurons encore

$$P_{\alpha x} = P_{xx}\alpha_1 + P_{yx}\alpha_2 + P_{zx}\alpha_3.$$

Démontrons, en effet, l'égalité

$$\Sigma_{\delta\varpi}\rho_1 I_{1x}\delta\varpi_1 = \Sigma_S P_{\alpha x}\delta\omega. \tag{9}$$

(*a*) Les vecteurs émanant d'un point intérieur au tétraèdre et correspondant à un point extérieur au tétraèdre figurent dans chacune des deux sommes.

(*b*) Les vecteurs émanant d'un point intérieur au tétraèdre et correspondant à un point intérieur au tétraèdre ne figurent pas dans la deuxième somme et se détruisent deux à deux dans la première somme.

(*c*) Les vecteurs émanant d'un point M_1 extérieur au tétraèdre et correspondant à un point M extérieur au tétraèdre ne figurent pas dans la première somme; dans la seconde somme, ils figurent deux à deux en signe contraire aux points de percée du segment $\overline{M}\overline{M_1}$ dans la surface intérieure du tétraèdre; ils disparaissent donc dans la deuxième somme.

L'égalité (9) étant ainsi établie, on peut continuer la démonstration comme au n° **76**, à partir de l'égalité correspondante.

84. 2° En chaque point du milieu, l'on a

$$\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} = \rho I_x$$

et relations correspondantes pour ρI_y et ρI_z.

Digitized by Google

Reprenons les notations du n° **77** et démontrons que l'on a encore

$$\Sigma_D \rho I_x \delta\varpi = \Sigma_S P_{\alpha x} \delta\omega. \tag{10}$$

(*a*) Considérons un vecteur différentiel émanant de N intérieur à D, et correspondant à N′ extérieur à D. La composante de ce vecteur figure une fois dans la première somme, avec le signe + par exemple.

Elle figure alors $(n+1)$ fois dans la deuxième somme avec le signe + aux points de percée $N_1, N_3, \ldots, N_{2n+1}$, et n fois avec le signe — aux points de percée $N_2, N_4, \ldots, N_{2n}$ du segment $\overline{NN'}$ dans S; elle reste donc une fois avec le signe + dans la deuxième somme.

(*b*) Considérons les vecteurs différentiels émanant d'un point N intérieur à D et correspondant à un point N′ intérieur à D. Les composantes de tels vecteurs se détruisent deux à deux dans la première somme. Dans la deuxième somme elles figurent avec un signe aux points de percée $N_1, N_3, \ldots, N_{2n-1}$, avec l'autre signe aux points de percée $N_2, N_4, \ldots, N_{2n}$ de $\overline{NN'}$ dans la surface de D. Ces composantes disparaissent donc aussi de la deuxième somme.

(*c*) Enfin il reste les vecteurs émanant d'un point N extérieur à D et correspondant à un point N′ extérieur à D. Les composantes de ces vecteurs ne figurent pas dans la première somme. Elles figurent avec un signe aux points de percée $N_1, N_3, \ldots, N_{2n-1}$ et avec le signe contraire aux points de percée $N_2, N_4, \ldots, N_{2n}$, de $\overline{NN'}$ dans la surface de D. Ces composantes disparaissent donc encore de la deuxième somme.

L'égalité (10) est donc bien démontrée, et le reste de la démonstration se poursuit comme au n° **77** à partir de l'égalité correspondante.

85. 3° Enfin l'on a encore en chaque point du milieu

$$P_{yz} = P_{zy}, \qquad P_{zx} = P_{xz}, \qquad P_{xy} = P_{yx},$$

comme au n° **58**; démontrons pour cela que l'on a encore

$$\Sigma_S (P_{\alpha y} z - P_{\alpha z} y)\, \delta\omega - \Sigma_D \rho (I_y z - I_z y)\, \delta\varpi = 0. \tag{11}$$

Sans entrer dans de plus amples détails, disons que, à toutes les positions de deux points M et M_1 relativement au domaine D, il correspond dans les sommes du premier membre, aux deux vecteurs différentiels émanant de M

Digitized by Google

et de M_1, un nombre pair $2n$ de vecteurs appliqués en $2n$ points du segment MM_1; ces vecteurs sont d'ailleurs dirigés n fois suivant $\overline{MM_1}$ et n fois suivant $\overline{M_1M}$.

La somme des moments de ces vecteurs, par rapport à l'axe ox, est donc nulle. C'est précisément cette somme qui figure dans la relation (11), qui est par conséquent vérifiée.

Le reste de la démonstration se continue comme au n° **78**; comme au n° **79**, on démontrerait aussi que le champ des pressions de Navier est bien un champ quadratique $\overline{\overline{P}}$.

III. — Transformation en intégrales de volume des sommes donnant les pressions de Navier.

86. Les sommes donnant directement les composantes des pressions de Navier, en fonction des vecteurs différentiels, se présentent sous une forme assez compliquée.

On peut les transformer en intégrales de volume dans l'hypothèse suivante :

La fonction $f_1(x_1^2, y_1^2, z_1^2)$ *devient insensible dès que* r_1 *devient sensible, c'est-à-dire dépasse une limite* R_1 *extrêmement petite, appelée rayon d'activité moléculaire du milieu au point* M *ou au point* M_1.

87. *Démonstration.* — Considérons un champ continu de vecteurs quelconques $\overline{A}$.

Aux points M et M_1 correspond le vecteur différentiel

$$\rho\rho_1 f_1 \, \delta\varpi \, \delta\varpi_1$$

dirigé en M vers M_1 si f_1 est négatif.

En M *le produit* du vecteur $\overline{A}$ et du vecteur différentiel a pour expression

$$-\rho\rho_1 \frac{f_1}{r_1} \delta\varpi \, \delta\varpi_1 (A_x x_1 + A_y y_1 + A_z z_1).$$

En M_1 le produit du vecteur différentiel et du vecteur $\overline{A_1}$ sera

$$\rho\rho_1 \frac{f_1}{r_1} \delta\varpi \, \delta\varpi_1 (A_{1x} x_1 + A_{1y} y_1 + A_{1z} z_1).$$

Digitized by Google

La somme de ces deux produits sera donc

$$\sigma_1 = \rho\rho_1 \frac{f_1}{r_1} \delta\varpi\, \delta\varpi_1 [(A_{1x} - A_x)x_1 + (A_{1y} - A_y)y_1 + (A_{1z} - A_z)z_1].$$

Cette somme n'existe que si r_1 est plus petit que R_1. Mais alors M et M_1 sont tellement rapprochés que, si le champ $\overline{A}$ est bien continu, on peut remplacer approximativement $(A_{1x} - A_x)$, ..., par les premiers termes de la formule de Taylor

$$A_{1x} - A_x = \frac{\partial A_x}{\partial x} x_1 + \frac{\partial A_x}{\partial y} y_1 + \frac{\partial A_x}{\partial z} z_1,$$
$$A_{1y} - A_y = \frac{\partial A_y}{\partial x} x_1 + \frac{\partial A_y}{\partial y} y_1 + \frac{\partial A_y}{\partial z} z_1,$$
$$A_{1z} - A_z = \frac{\partial A_z}{\partial x} x_1 + \frac{\partial A_z}{\partial y} y_1 + \frac{\partial A_z}{\partial z} z_1.$$

Par suite, avec les notations du champ quadratique $\overline{\overline{A}}$,

$$\sigma_1 = \rho\rho_1 \frac{f_1}{r_1} \delta\varpi\, \delta\varpi_1 [A_{xx}x_1^2 + A_{yy}y_1^2 + A_{zz}z_1^2 + 2(A_{yz}y_1z_1 + A_{zx}z_1x_1 + A_{xy}x_1y_1)].$$

Faisons la somme de tous les produits intéressant les couples de vecteurs différentiels dont l'un émane du point M. Nous obtenons

$$\sigma = \rho\, \delta\varpi \Sigma\rho_1 \frac{f_1}{r_1} [A_{xx}x_1^2 + A_{yy}y_1^2 + A_{zz}z_1^2 + 2(A_{yz}y_1z_1 + A_{zx}z_1x_1 + A_{xy}x_1y_1)]\, \delta\varpi_1.$$

Faisons enfin la somme de toutes les sommes σ correspondant aux points M intérieurs au domaine quelconque D, nous aurons

$$\sigma_D = \Sigma_D \rho\, \delta\varpi \Sigma\rho_1 \frac{f_1}{r_1} \delta\varpi_1 (A_{xx}x_1^2 + \ldots + 2A_{xy}x_1y_1); \tag{12}$$

σ_D comprend :

(a) Deux fois le produit du vecteur $\overline{A}$ et des vecteurs différentiels émanant d'un point intérieur à D et correspondant à un autre point intérieur à D.

Soit 2A la somme de ces produits.

(b) Une fois le produit du vecteur $\overline{A}$ et des vecteurs différentiels émanant d'un point intérieur à D et correspondant à un point extérieur à D; soit B.

Digitized by Google

(*c*) Une fois le produit du vecteur A et des vecteurs différentiels émanant d'un point extérieur à D et correspondant à un point intérieur à D; soit C.

On a donc

$$\sigma_D = 2A + B + C. \tag{13}$$

Calculons B.

On peut grouper les vecteurs différentiels qui entrent dans son expression en pressions élémentaires de Navier au travers de la surface S limitant D.

Soient $\delta\omega$ un petit élément de S, N son centre de figure, (α) la normale extérieure à S émanant de N, $\overline{P_\alpha}\,\delta\omega$ la pression moyenne de Navier au travers de $\delta\omega$.

Les vecteurs différentiels qui concourent à former $\overline{P_\alpha}\,\delta\omega$ sont appliqués en des points M extrêmement voisins de N. On peut donc admettre en première approximation que les vecteurs $\overline{A}$ émanant de tous ces points M sont sensiblement équipollents au vecteur $\overline{A}$ du point $\overline{N}$.

Dès lors, le produit de ces vecteurs différentiels et du vecteur $\overline{A}$ aura l'expression suivante :

$$(P_{\alpha x}A_x + P_{\alpha y}A_y + P_{\alpha z}A_z)\,\delta\omega,$$

x, y, z étant les coordonnées du point N.

Par suite on aura

$$B = \Sigma_S(P_{\alpha x}A_x + P_{\alpha y}A_y + P_{\alpha z}A_z)\,\delta\omega. \tag{14}$$

On trouvera de même

$$C = -\Sigma_S(P_{\alpha x}A_x + P_{\alpha y}A_y + P_{\alpha z}A_z)\,\delta\omega. \tag{15}$$

B et C ont donc même valeur absolue en première approximation.

D'un autre côté, on a évidemment

$$A + B = -\Sigma_D \rho\,\delta\varpi\left[\left(\Sigma\rho_1\frac{f_1}{r_1}x_1\,\delta\varpi\right)A_x + \left(\Sigma\rho_1\frac{f_1}{r_1}y_1\,\delta\varpi\right)A_y + \left(\Sigma\rho_1\frac{f_1}{r_1}z_1\,\delta\varpi\right)A_z\right],$$

puisque (A + B) est la somme des produits du vecteur $\overline{A}$ et de tous les vecteurs différentiels appliqués en un point intérieur à D.

Digitized by Google

On peut écrire cette relation, à cause de (8),

$$A + B = \Sigma_D \rho\, \delta\varpi (I_x A_x + I_y A_y + I_z A_z). \tag{16}$$

On a maintenant en (13), à l'aide de (14), (15) et (16) et en passant aux intégrales par approximation,

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_D &= 2A + B + C = 2(A + B) + (C - B) = 2(A + B) + 2C \\ &= 2\left[\int_D \rho\, d\varpi (I_x A_x + I_y A_y + I_z A_z) - \int_S (P_{\alpha x} A_x + P_{\alpha y} A_y + P_{\alpha z} A_z)\, d\omega \right]. \end{aligned} \right. \tag{17}$$

A l'aide de formules connues et de la transformation de Green, on trouvera ensuite

$$\begin{aligned} &\int_S (P_{\alpha x} A_x + P_{\alpha y} A_y + P_{\alpha z} A_z)\, d\omega \\ &= \int_S [(P_{xx} A_x + P_{xy} A_y + P_{xz} A_z)\alpha_1 \\ &\qquad + (P_{yx} A_x + P_{yy} A_y + P_{zy} A_z)\alpha_2 + (P_{zx} A_x + P_{zy} A_y + P_{zz} A_z)\alpha_3]\, d\omega \\ &= \int_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (P_{xx} A_x + P_{xy} A_y + P_{xz} A_z) \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial y} (P_{yx} A_x + P_{yy} A_y + P_{zy} A_z) + \frac{\partial}{\partial z} (P_{zx} A_x + P_{zy} A_y + P_{zz} A_z) \right] d\varpi \\ &= \int_D \left[A_x \left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} \right) + A_y \left(\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z} \right) \right. \\ &\qquad + A_z \left(\frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} \right) \\ &\qquad \left. + P_{xx} A_{xx} + P_{yy} A_{yy} + P_{zz} A_{zz} + 2(P_{yz} A_{yz} + P_{zx} A_{zx} + P_{xy} A_{xy}) \right] d\varpi \\ &= \int_D \rho\, d\varpi (I_x A_x + I_y A_y + I_z A_z) + \int_D d\varpi (\overline{\overline{P}}\,\overline{\overline{A}}). \end{aligned}$$

On obtient ainsi en (17),

$$\sigma_D = -2 \int_D (\overline{\overline{P}}\,\overline{\overline{A}})\, d\varpi.$$

Et avec (12)

$$\int_D \rho\, d\varpi \times \int \rho_1 \frac{f_1}{r_1}\, d\varpi_1 (A_{xx} x_1^2 + \ldots + 2A_{xy} x_1 y_1) = -2 \int_D d\varpi (\overline{\overline{P}}\,\overline{\overline{A}}).$$

Cette relation devant être vérifiée quel que soit D, on en conclut

$$\rho \Sigma \rho_1 \frac{f_1}{r_1}\, \delta\varpi_1 (A_{xx} x_1^2 + \ldots + 2A_{xy} x_1 y_1) = -2 \overline{\overline{P}}\,\overline{\overline{A}}. \tag{18}$$

Digitized by Google

En développant $\overline{\overline{PA}}$, la formule (18) peut s'écrire sous forme d'une expression linéaire et homogène en A_{xx}, A_{yy}, A_{zz}, A_{yz}, A_{zx}, A_{xy}, expression qui doit être nulle quelles que soient ces six fonctions. Il faut en conclure que les coefficients de ces fonctions sont identiquement nuls, ce qui conduit aux six relations

$$(19)\quad \begin{cases} P_{xx} = -\frac{1}{2}\rho\Sigma\rho_1 \frac{f_1}{r_1} x_1^2 \delta\varpi_1, \\ P_{yy} = -\frac{1}{2}\rho\Sigma\rho_1 \frac{f_1}{r_1} y_1^2 \delta\varpi_1, \\ P_{zz} = -\frac{1}{2}\rho\Sigma\rho_1 \frac{f_1}{r_1} z_1^2 \delta\varpi_1, \\ P_{yz} = -\frac{1}{2}\rho\Sigma\rho_1 \frac{f_1}{r_1} y_1 z_1 \delta\varpi_1, \\ P_{zx} = -\frac{1}{2}\rho\Sigma\rho_1 \frac{f_1}{r_1} z_1 x_1 \delta\varpi_1, \\ P_{xy} = -\frac{1}{2}\rho\Sigma\rho_1 \frac{f_1}{r_1} x_1 y_1 \delta\varpi_1. \end{cases}$$

On en tire

$$P = P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} = -\frac{1}{2}\rho\Sigma\rho_1 f_1 r_1 \delta\varpi_1.$$

Ces formules connues sont les relations cherchées, qui donnent les six éléments du champ quadratique des pressions de Navier, sous forme d'intégrales de volume.

88. A l'aide de la relation fondamentale des champs quadratiques on en tire

$$P_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\rho\Sigma\rho_1 \frac{f_1}{r_1}\delta\varpi_1 [x_1^2\alpha_1\beta_1 + y_1^2\alpha_2\beta_2 + z_1^2\alpha_3\beta_3 + y_1 z_1(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) + z_1 x_1(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) + x_1 y_1(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)].$$

En projetant r_1 sur les directions (α) et (β) on obtient

$$r_{1\alpha} = x_1\alpha_1 + y_1\alpha_2 + z_1\alpha_3,$$
$$r_{1\beta} = x_1\beta_1 + y_1\beta_2 + z_1\beta_3;$$

par suite

$$r_{1\alpha} \times r_{1\beta} = x_1^2\alpha_1\beta_1 + y_1^2\alpha_2\beta_2 + z_1^2\alpha_3\beta_3 + y_1 z_1(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) + z_1 x_1(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) + x_1 y_1(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1).$$

On peut donc écrire

$$(20)\quad P_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\rho\Sigma\rho_1 \frac{f_1}{r_1} r_{1\alpha} \times r_{1\beta}.$$

Digitized by Google

Telle est la formule remarquable donnant la composante générale $P_{\alpha\beta}$ de la pression de Navier, sous forme d'une intégrale de volume, *dans le cas du rayon d'activité réduit.*

Chaque fois qu'une fonction $P'_{\alpha\beta}$ se présentera dans ces conditions sous la forme

$$P'_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\rho' \Sigma \rho'_1 \frac{f'_1}{r_1} r_{1\alpha} \times r_{1\beta},$$

ρ' et f' satisfaisant aux conditions exigées pour ρ et f, $P'_{\alpha\beta}$ sera la fonction générale d'un champ quadratique $\overline{\overline{P'}}$.

89. Remarquons encore, pour terminer, que, dans le cas du champ d'activité réduit, il n'y a pas d'inconvénient à supposer que f_1 soit fonction, outre de x_1^2, y_1^2, z_1^2, de certaines variables ρ'', ρ''', ..., fonctions de x, y et z, qui conserveraient des valeurs sensiblement constantes dans l'intérieur du champ d'activité d'un point du milieu. Ces variables joueraient alors le rôle de constantes dans les sommes que nous envisageons, et n'altéreraient pas nos conclusions.

IV. — Application. Théorie de la propagation de la chaleur par conductibilité, dans les milieux indéfinis, par Fourier.

90. Les théories de l'élasticité (hypothèse des forces centrales) et la théorie de la propagation de la chaleur par conductibilité de Fourier offrent des applications immédiates des résultats analytiques que nous venons d'établir.

Il nous a semblé intéressant de traiter ce dernier exemple, dont nous allons renouveler quelque peu l'exposition. Il est entendu que nous nous plaçons au point de vue analytique, et que nous n'entendons pas discuter ici la théorie de Fourier au point de vue de la réalisation physique des hypothèses qui en sont le point de départ (1).

(1) La chaleur étant une des formes du travail, il semble que l'on doive accorder plus de crédit aux théories qui cherchent l'origine de la propagation de la chaleur dans le travail produit par l'agitation calorifique. Consulter à ce sujet : J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur*, t. I et II, Gauthier-Villars; 1901-1903.

Digitized by Google

91. *Hypothèse fondamentale de Fourier.* — Soient T et T_1 les températures des deux particules M et M_1 d'un corps quelconque.

Avec M. H. Poincaré (1) nous admettrons, en généralisation de l'idée de Fourier, que, pendant le temps extrêmement court δt, la particule M_1 cède à la particule M une quantité de chaleur égale à

$$\delta Q = \Phi(r_1, T)(T_1 - T)\,\delta t,$$

$\Phi(r_1, T)$ étant une fonction de r_1 négligeable dès que r_1 devient sensible.

Nous admettrons, de plus, que δQ est proportionnel aux masses des deux particules en présence.

Si ρ est la densité moyenne du corps en M, ρ_1 la densité moyenne du corps en M_1, ces masses sont respectivement

$$\rho\,\delta\varpi \quad \text{et} \quad \rho_1\,\delta\varpi_1.$$

Nous prendrons ainsi définitivement

$$\delta Q = \rho\,\delta\varpi \times \rho_1\,\delta\varpi_1 \times \psi(r_1, T)(T_1 - T) \times \delta t, \tag{21}$$

$\psi(r_1, T)$ étant encore négligeable dès que r_1 devient sensible.

92. La quantité totale de chaleur reçue au bout du temps δt par la particule M peut s'écrire

$$C \times \rho \times \delta\varpi \times \delta T,$$

C étant la chaleur spécifique du corps en M; δT l'accroissement de la température au bout du temps δt.

D'un autre côté, cette quantité totale de chaleur s'exprime par

$$\Sigma\,\delta Q,$$

le signe Σ s'adressant à toutes les particules échangeant de la chaleur avec M.

En passant à la limite, δt tendant vers zéro, on trouve donc l'équation suivante :

$$C\rho\,\delta\varpi \times \frac{dT}{dt} = \rho\,\delta\varpi \Sigma \rho_1 \psi(r_1 T)(T_1 - T)\,\delta\varpi_1,$$

---

(1) Consulter : H. Poincaré, *Propagation de la chaleur,* p. 4. Paris, Naud. 1895.

Digitized by Google

ou bien encore

$$C\frac{dT}{dt} = \Sigma\rho_1\psi(r_1T)(T_1 - T)\,\delta\varpi_1.$$

T et T_1 sont des fonctions continues des coordonnées des points M et M_1, par rapport à $oxyz$; dans la somme Σ n'interviennent que des points M_1, extrêmement rapprochés du point M. Avec les notations du n° **61** on peut donc écrire par approximation

$$T_1 - T = \frac{\partial T}{\partial x}x_1 + \frac{\partial T}{\partial y}y_1 + \frac{\partial T}{\partial z}z_1.$$

Par suite

$$(22)\qquad \begin{cases} C\dfrac{dT}{dt} = \Sigma\rho_1\psi(r_1T)\dfrac{\partial T}{\partial x}x_1\,\delta\varpi_1 + \Sigma\rho_1\psi(r_1T)\dfrac{\partial T}{\partial y}y_1\,\delta\varpi_1 \\ \qquad\qquad + \Sigma\rho_1\psi(r_1T)\dfrac{\partial T}{\partial z}z_1\,\delta\varpi_1. \end{cases}$$

93. Posons

$$(23)\qquad \begin{cases} K_{xx} = \frac{1}{2}\rho\Sigma\rho_1\psi(r_1T)x_1^2\,\delta\varpi_1, \\ K_{yy} = \frac{1}{2}\rho\Sigma\rho_1\psi(r_1T)y_1^2\,\delta\varpi_1, \\ K_{zz} = \frac{1}{2}\rho\Sigma\rho_1\psi(r_1T)z_1^2\,\delta\varpi_1; \\ K_{yz} = \frac{1}{2}\rho\Sigma\rho_1\psi(r_1T)y_1z_1\,\delta\varpi_1, \\ K_{zx} = \frac{1}{2}\rho\Sigma\rho_1\psi(r_1T)z_1x_1\,\delta\varpi_1, \\ K_{xy} = \frac{1}{2}\rho\Sigma\rho_1\psi(r_1T)x_1y_1\,\delta\varpi_1. \end{cases}$$

D'après le paragraphe III du présent Chapitre, les quantités

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}K_{xx}\right),\quad \left(\frac{\partial T}{\partial x}K_{yy}\right),\quad \ldots,\quad \left(\frac{\partial T}{\partial x}K_{xy}\right)$$

constituent les éléments d'un champ bilinéaire quadratique, dont le vecteur-force est donné par les trois projections

$$\rho\Sigma\rho_1\psi(r_1T)\frac{\partial T}{\partial x}x_1\,\delta\varpi_1,$$
$$\rho\Sigma\rho_1\psi(r_1T)\frac{\partial T}{\partial x}y_1\,\delta\varpi_1,$$
$$\rho\Sigma\rho_1\psi(r_1T)\frac{\partial T}{\partial x}z_1\,\delta\varpi_1.$$

Digitized by Google

En effet, d'après le n° **89**, on peut supposer que, dans les formules (8), $\frac{f_1}{r_1}$ se met sous la forme particulière

$$\frac{f_1}{r_1} = -\psi(r_1 T)\frac{\partial T}{\partial x},$$

T et $\frac{\partial T}{\partial x}$ prennent en effet des valeurs que l'on peut supposer approximativement constantes pour toutes les positions du point M_1 auxquelles correspond une valeur sensible de $\psi(r_1 T)$.

L'équation (19) démontre alors la proposition énoncée.

Avec la formule du vecteur-force, on pourra alors écrire

$$\rho\Sigma\rho_1\psi(r_1 T)\frac{\partial T}{\partial x}x_1\delta\varpi_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}K_{xx}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial x}K_{yx}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial x}K_{zx}\right).$$

De même

$$\rho\Sigma\rho_1\psi(r_1 T)\frac{\partial T}{\partial y}y_1\delta\varpi_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial y}K_{xy}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}K_{yy}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial y}K_{zy}\right),$$

$$\rho\Sigma\rho_1\psi(r_1 T)\frac{\partial T}{\partial z}z_1\delta\varpi_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial z}K_{xz}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial z}K_{yz}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial z}K_{zz}\right),$$

Par suite, dans l'équation du mouvement (22)

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} C\times\rho\times\frac{dT}{dt} = {} & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}K_{xx}+\frac{\partial T}{\partial y}K_{yx}+\frac{\partial T}{\partial z}K_{zx}\right)\\ & +\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial x}K_{xy}+\frac{\partial T}{\partial y}K_{yy}+\frac{\partial T}{\partial z}K_{zy}\right)\\ & +\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial x}K_{xz}+\frac{\partial T}{\partial y}K_{yz}+\frac{\partial T}{\partial z}K_{zz}\right).\end{aligned}\right.$$

La relation (24) est l'équation la plus générale du mouvement de la chaleur, déduite de l'hypothèse du rayonnement particulaire de Fourier.

Les six paramètres $K_{xx}, \ldots, K_{xy}$ constituent les éléments d'un champ bilinéaire quadratique $\overline{\overline{K}}$ des *coefficients de conductibilité* du corps envisagé.

Les pressions normales K_{zz} de ce champ $\overline{\overline{K}}$ sont les *coefficients de conductibilité directe*.

Digitized by Google

Posons

$$(25)\qquad \begin{cases} F_x = \dfrac{\partial T}{\partial x} K_{xx} + \dfrac{\partial T}{\partial y} K_{yx} + \dfrac{\partial T}{\partial z} K_{zx}, \\ F_y = \dfrac{\partial T}{\partial x} K_{xy} + \dfrac{\partial T}{\partial y} K_{yy} + \dfrac{\partial T}{\partial z} K_{zy}, \\ F_z = \dfrac{\partial T}{\partial x} K_{xz} + \dfrac{\partial T}{\partial y} K_{yz} + \dfrac{\partial T}{\partial z} K_{zz}, \end{cases}$$

F_x, F_y, F_z sont les composantes du vecteur $\overline{F}$ des produits du champ de vecteurs dérivant du potentiel T et du champ $\overline{\overline{K}}$ (n° **31**).

On pourrait dire par définition que F_α est le *flux de chaleur* au travers du plan perpendiculaire à la direction (α).

L'équation du mouvement (24) peut ainsi s'écrire

$$(26)\qquad C \times \rho \times \frac{dT}{dt} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Le deuxième membre de (25) est la divergence du vecteur $\overline{F}$ des flux de chaleurs; d'après le n° **33**, si $\overline{T}$ est le champ de vecteurs dérivant de T on a

$$C \times \rho \times \frac{d\overline{T}}{dt} = \overline{T} \times \overline{I} + \overline{\overline{T}} \times \overline{\overline{k}},$$

$\overline{I}$ étant le vecteur-force du champ $\overline{\overline{K}}$.

94. Nous n'avons pas l'intention de développer ici toutes les conséquences que l'on peut déduire de l'équation (24), tant au point de vue analytique qu'au point de vue physique. Elles sont remarquablement exposées dans la *Théorie analytique de la chaleur*, par M. J. Boussinesq (¹).

Faisons cependant la remarque suivante : Fourier et Poisson se sont bornés dans leurs recherches au cas des corps isotropes; le champ quadratique $\overline{\overline{K}}$ devient alors un champ normal $\overline{\overline{K_0}}$ (n° **57**) $K_{xx} = K_{yy} = K_{zz}$; $K_{yz} = K_{zx} = K_{xy} = 0$.

Duhamel et Lamé ont étudié des milieux cristallisés dans lesquels la

(¹) M. Boussinesq envisage le cas le plus général possible, celui où dans les équations (25) des flux figurent 9 coefficients de conductibilité différents au lieu de 6 ($K_{yz} \neq K_{zy}$).

Digitized by Google

fonction $\psi(r_1, T)$ dépendrait des deux angles définissant la direction de la droite $\overline{MM_1}$ (1).

Duhamel est parvenu à introduire ainsi six coefficients de conductibilité dans l'équation de la propagation de la chaleur (2).

Lamé a cru obtenir neuf coefficients, en supposant que la quantité de chaleur échangée entre deux particules [formule (21)] avait une valeur différente pour deux directions opposées l'une à l'autre (3).

M. Boussinesq a remarqué (4) que cette dernière hypothèse de Lamé n'a pas de sens au point de vue physique. D'ailleurs, dans un Mémoire publié dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (1887, p. 167), M. Carvallo a repris l'hypothèse de Duhamel et a prouvé que ce ne peut être qu'à une imperfection de son analyse qu'est due la plus grande généralité des résultats obtenus par Lamé.

Pour clore cette discussion, il nous paraît intéressant de signaler qu'il n'est pas même nécessaire de faire l'hypothèse de Duhamel concernant l'influence de la *direction* de $\overline{MM_1}$ sur la quantité de chaleur échangée, pour obtenir six coefficients de conductibilité. L'analyse que nous venons de faire prouve que l'hypothèse simple du rayonnement particulaire de Fourier conduit à une pareille généralisation de l'équation de la propagation de la chaleur, dans le cas du milieu hétérotrope.

---

(1) Boussinesq, *Loc. cit.*, t. I, p. 6 et 7.

(2) *Voir* le Mémoire de Duhamel *Sur la propagation de la chaleur dans les solides non isotropes* (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XIII).

(3) Lamé, *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur.*

(4) Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur*, t. I, p. 7.

Digitized by Google

QUATRIÈME APPLICATION.

CHAMPS QUADRATIQUES D'ATTRACTION. — MOMENTS D'INERTIE.

I. – Potentiel d'attraction.

93. Soient :

x, y, z, les coordonnées d'un point M de l'espace par rapport aux axes rectangulaires OXYZ;

X_1, Y_1, Z_1, les coordonnées d'un point M_1 par rapport aux mêmes axes;

r_1, la grandeur absolue du segment $\overline{M_1 M}$;

$$x_1 = x - X_1, \qquad y_1 = y - Y_1, \qquad z_1 = z - Z_1,$$

les projections de $\overline{M_1 M}$ sur les axes de coordonnées;

f_1, une fonction continue de r_1;

ρ_1, une fonction continue de X_1, Y_1, Z_1;

D, un domaine de l'espace, limité par la surface fermée S;

$\delta\varpi_1$, un élément de volume compris dans le domaine D, et entourant le point M_1.

Considérons l'intégrale

$$V = \int_D \rho_1 f_1 \, d\varpi_1,$$

correspondant au point M (x, y, z) et à tous les points $M_1(X_1, Y_1, Z_1)$ renfermés dans le domaine D.

En dérivant par rapport à x, y et z, on trouve, en posant $\frac{df_1}{dr_1} = f'_1$,

$$I_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \int_D \rho_1 f'_1 \frac{x_1}{r_1} \, d\varpi_1,$$

$$I_y = \frac{\partial V}{\partial y} = \int_D \rho_1 f'_1 \frac{y_1}{r_1} \, d\varpi_1,$$

$$I_z = \frac{\partial V}{\partial z} = \int_D \rho_1 f'_1 \frac{z_1}{r_1} \, d\varpi_1.$$

Digitized by Google

I_x, I_y, I_z peuvent être considérés comme les projections d'un vecteur $\bar{I}$ de l'espace ayant origine au point M. Ce vecteur représente alors l'*attraction centrale* exercée sur l'unité de masse située au point M, par un milieu occupant l'espace D avec la densité ρ_1, l'intensité de la force attirante étant marquée par la fonction f'_1.

L'attraction totale $\bar{I}$ constitue donc un champ de vecteurs dérivant du potentiel V.

L'étude de la fonction potentielle V du champ d'attraction $\bar{I}$, correspondant à diverses formes de la fonction f_1 et de la surface S, a donné lieu à des recherches extrêmement intéressantes qui trouvent leur application en Physique mathématique (¹).

96. On peut faire correspondre, au potentiel V, divers systèmes de champs bilinéaires quadratiques; considérons, par exemple, *le champ quadratique* $\overline{\overline{P_1}}$ *dérivant au deuxième ordre de la fonction* V.

On obtient, en posant $\frac{f'_1}{r} = \pi(r_1)$ et $\frac{d}{dr}\frac{f'_1}{r} = \pi'(r_1)$,

$$P_{xx} = \frac{\partial I_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \int_D \rho_1 \pi'(r) \frac{x_1^2}{r_1} d\varpi_1 + \int_D \rho_1 \pi(r_1) d\varpi_1,$$

$$P_{yy} = \int_D \rho_1 \pi'(r_1) \frac{y_1^2}{r_1} d\varpi_1 + \int_D \rho_1 \pi(r_1) d\varpi_1,$$

$$P_{zz} = \int_D \rho_1 \pi'(r_1) \frac{z_1^2}{r_1} d\varpi_1 + \int_D \rho_1 \pi(r_1) d\varpi_1;$$

$$P_{yz} = \int_D \rho_1 \pi'(r_1) \frac{y_1 z_1}{r_1} d\varpi_1,$$

$$P_{zx} = \int_D \rho_1 \pi'(r_1) \frac{z_1 x_1}{r_1} d\varpi_1,$$

$$P_{xy} = \int_D \rho_1 \pi'(r_1) \frac{x_1 y_1}{r_1} d\varpi_1,$$

$r_{1\alpha}$ et $r_{1\beta}$ étant les projections de r_1 sur les directions (α) et (β), à l'aide de la formule fondamentale des champs quadratiques on trouvera, comme

(¹) Consulter entre autres, à ce sujet :

H. POINCARÉ, *Théorie du potentiel newtonien*. Paris, Naud, 1899.

APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

Digitized by Google

au n° **88**,

$$P_{\alpha\beta}=\int_D \rho_1\pi'(r_1)\frac{r_{1\alpha}\times r_{1\beta}}{r_1}\,d\varpi_1+\int_D \rho_1\pi(r_1)\,d\varpi_1\times(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3).$$

Le champ quadratique $\overline{\overline{P'}}$ complémentaire du champ $\overline{\overline{P}}$ (n° **25**) est donné par la formule

$$P'_{\alpha\beta}=P(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)-P_{\alpha\beta},$$

$$P'_{\alpha\beta}=\int_D \rho_1[\pi'(r_1)r_1-\pi(r_1)]d\varpi_1\times(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)-\int_D \rho_1\pi'(r_1)\frac{r_{1\alpha}\times r_{1\beta}}{r_1}\,d\varpi_1.$$

Notons $\overline{L}$ le vecteur-force du champ $\overline{\overline{P}}$, et posons

$$\frac{\pi'(r_1)}{r_1}=\psi(r_1),\qquad \frac{d}{dr_1}\left[\frac{\pi'(r_1)}{r_1}\right]=\psi'(r_1).$$

Nous aurons

$$\begin{aligned}L_x=&\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial P_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial P_{zx}}{\partial z}\\ =&\int_D \rho_1\psi'(r_1)\frac{x_1^3}{r_1}\,d\varpi_1+2\int_D \rho_1\psi(r_1)x_1\,d\varpi_1+\int_D \rho_1\psi(r_1)x_1\,d\varpi_1\\ &+\int_D \rho_1\psi'(r_1)\frac{x_1y_1^2}{r_1}\,d\varpi_1+\int_D \rho_1\psi(r_1)x_1\,d\varpi_1\\ &+\int_D \rho_1\psi'(r_1)\frac{x_1z_1^2}{r_1}\,d\varpi_1+\int_D \rho_1\psi(r_1)x_1\,d\varpi_1,\\ L_x=&\int_D \rho_1[\psi'(r_1)\times r_1+5\psi(r_1)]x_1\,d\varpi_1.\end{aligned}$$

De même,

$$L_y=\int_D \rho_1[\psi'(r_1)\times r_1+5\psi(r_1)]y_1\,d\varpi_1,$$

$$L_z=\int_D \rho_1[\psi'(r_1)\times r_1+5\psi(r_1)]z_1\,d\varpi_1.$$

Si l'on pose

$$\psi'(r_1)r_1+5\psi(r_1)=\frac{\varphi'(r_1)}{r_1},$$

on voit que le vecteur $\overline{L}$ dérive d'un potentiel

$$\Phi=\int_D \rho_1\varphi(r_1)\,d\varpi_1$$

Digitized by Google

et qu'il peut aussi être considéré comme une attraction centrale totale exercée sur l'unité de masse en M, par le milieu du domaine D, l'intensité de la force étant cette fois marquée par la fonction $\varphi(r_1)$.

II. — Champs quadratiques $\overline{\overline{N}}$ et $\overline{\overline{N_0}}$.

97. De ce qui précède on peut conclure qu'*aux deux systèmes de champs bilinéaires quadratiques suivants correspondent des vecteurs-forces assimilables à des résultantes d'attraction centrale :*

1° *Champ quadratique* $\overline{\overline{N}}$, déterminé par la relation fondamentale :

$$N_{\alpha\beta} = \int_D \rho_1 \Pi(r_1) r_{1\alpha} \times r_{1\beta} \times d\varpi_1,$$

$\Pi(r_1)$ étant une fonction continue quelconque de r_1.

I étant le vecteur-force du champ $\overline{\overline{N}}$, on a

$$I_\alpha = \int_D \rho_1 [\Pi'(r_1) \times r_1 + 4\Pi(r_1)] r_{1\alpha} d\varpi_1.$$

2° *Champ quadratique normal* $\overline{\overline{N_0}}$ (n° **57**), déterminé par la relation fondamentale

$$N_{0\alpha\beta} = \int_D \rho_1 \Pi(r_1) \times r_1^2 d\varpi_1 \times (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3).$$

Le vecteur-force $\overline{I_0}$ est donné par sa projection

$$I_{0\alpha} = \int_D \rho_1 [\Pi'(r_1) r_1 + 2\Pi(r_1)] r_{1\alpha} \times d\varpi_1.$$

Tout champ quadratique résultant d'un certain nombre de champs $\overline{\overline{N}}$ et de champs $\overline{\overline{N_0}}$ aura aussi un vecteur-force assimilable à une résultante d'attraction centrale.

98. Si nous supposons que le milieu renfermé dans le domaine D est constitué par un ensemble de points matériels extrêmement rapprochés, isolés les uns des autres, et tels que si M et M_1 sont deux de ces points,

Digitized by Google

et m et m_1 leur masse, M et M_1 exercent l'un sur l'autre une action dirigée suivant la droite qui les joint, proportionnelle à leurs masses et à une fonction $f_1(r_1)$ de leur distance r_1, la projection, sur la direction (α), du vecteur $\bar{I}$ qui représente l'action totale exercée par le milieu sur l'unité de masse située au point M peut approximativement se représenter par l'intégrale

$$I_\alpha = \int_D \rho_1 f_1(r)_1 \frac{r_{1\alpha}}{r_1} d\varpi_1,$$

ρ_1 étant la densité moyenne du milieu aux environs du point M_1.

Les systèmes des champs quadratiques $\overline{\overline{N}}$ et $\overline{\overline{N}}_0$ qui peuvent correspondre au vecteur-force $\bar{I}$ pourraient être utilisés pour étudier ce champ d'attraction $\bar{I}$. Ces champs quadratiques déterminent des systèmes de pressions, différentes de celles déterminées aux deux Chapitres précédents.

Cette remarque donne encore plus de poids à l'observation que nous avons émise au 2° du n° **80**.

III. — Application des champs quadratiques $\overline{\overline{N}}$. Moments d'inertie.

99. Considérons le champ bilinéaire quadratique $\overline{\overline{N}}$ déterminé par la fonction :

$$\Pi(r_1) = \tau.$$

Nous obtenons

$$N_{\alpha\beta} = \int_D \rho_1 r_{1\alpha} \times r_{1\beta} \times d\varpi_1.$$

Les éléments de ce champ quadratique déterminent les moments d'inertie du milieu renfermé dans le domaine D par rapport aux axes et aux plans passant par le point M(xyz).

La pression cubique du champ $\overline{\overline{N}}$ vaut en effet

$$N = N_{xx} + N_{yy} + N_{zz} = \int_D \rho_1 r_1^2 d\varpi_1,$$

N *est donc le moment d'inertie du milieu par rapport au point* M.

Digitized by Google

La pression normale dans le champ $\overline{\overline{N}}$ atteint

$$N_{\alpha\alpha} = \int_D \rho_1 r_{1\alpha}^2 d\varpi_1,$$

$N_{\alpha\alpha}$ *est donc le moment d'inertie du milieu par rapport au plan perpendiculaire à la direction* (α) *passant par le point* M.

La quadrique directrice du champ $\overline{\overline{N}}$ est un ellipsoïde; elle peut servir à représenter les moments d'inertie du milieu par rapport aux divers plans passant par M.

Le champ quadratique complémentaire $\overline{\overline{N'}}$ du champ $\overline{\overline{N}}$ (n° **25**) est donné par la formule fondamentale

$$N'_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta} = N(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3).$$

La pression normale dans le champ $\overline{\overline{N'}}$ vaut donc

$$N'_{\alpha\alpha} = N - N_{\alpha\alpha} = \int_D \rho_1 (r_1^2 - r_{1\alpha}^2)\, d\varpi_1.$$

$(r_1^2 - r_{1\alpha}^2)$ est le carré de la distance du point M_1 à un axe de direction (α) passant par le point M.

$N'_{\alpha\alpha}$ *est donc le moment d'inertie du milieu par rapport à cet axe.*

La quadrique directrice du champ $\overline{\overline{N'}}$, qui est encore un ellipsoïde, représente donc les moments d'inertie du milieu par rapport aux axes de diverses directions passant par M. Elle constitue l'*ellipsoïde d'inertie* proprement dit de Poinsot (1).

100. Le champ de vecteurs dérivant de la pression cubique N détermine les éléments du centre de gravité G du milieu par rapport au point M.

On obtient, en effet,

$$\frac{\partial N}{\partial r_{1\alpha}} = 2\int_D \rho_1 r_{1\alpha} d\varpi_1.$$

Les vecteurs-forces $\bar{I}$ et $\bar{I}'$ des champs $\overline{\overline{N}}$ et $\overline{\overline{N'}}$ sont dans les mêmes con-

(1) *Voir*, par exemple, APPELL, *Mécanique rationnelle*, t. II, 1896, p. 60.

Digitized by Google

Digitized by Google